محاضرات
الأستاذ المساعد الدكتور نوري فرحان المياحي
قسم الرياضيات – كلية علوم الحاسوب والرياضيات – جامعة القادسية – العراق

ر331
التحليل الرياضي (1) Mathematical Analysis I

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

المحاضرة الأولى

1. مقـــــدمـة

هنالك تشابه بين مفردات حسبان التفاضل والتكامل وبين مفردات التحليل الرياضي إلا انه يوجد فرق كبير في طريقة دراسة هذه المفردات ففي الوقت الذي يكون فيه التأكيد على تعلم المهارات في استخدام بعض المفاهيم مثل الاشتقاق والتكامل في موضوع حسبان التفاضل والتكامل. يكون التأكيد في موضوع التحليل الرياضي على المفاهيم نفسها وكيفية تطورها وعلى البناء المنطقي للموضوع ككل وباختصار يكون التأكيد في موضوع حسبان التفاضل والتكامل على الإجابة على الأسئلة من نوع كيف ؟ بينما يكون التأكيد في موضوع التحليل الرياضي على الأسئلة من نوع لماذا ؟ بالإضافة إلى اهتمام الموضوع على الربط بين المفاهيم المختلفة.

2. المجموعات المرتبة Ordered Sets

تعريف (1.2)

لتكن R علاقة على المجموعة X يقال أن

(1) R علاقة انعكاسية (Reflexive) على X إذا كان xRx لكل $x \in X$

(2) R متناظرة (Symmetric) على X إذا تحقق الشرط الأتي : إذا كان xRy فان yRx

(3) R متعدية (Transitive) على X إذا تحقق الشرط الأتي :

إذا كان xRy وكان yRz فان xRz

(4) R تخالفيه (ضد متناظرة) (Anti-symmetric) على X إذا تحقق الشرط الآتي :

إذا كان xRy وكان yRx فان $x = y$.

لتكن R علاقة على المجموعة X .يقال عن R بأنها علاقة ترتيب ابتدائية (Preorder relation) على المجموعة X إذا كانت R انعكاسية ومتعدية ويقال أن R علاقة ترتيب جزئي (Partial order relation) على X إذا كانت R انعكاسية, متعدية وتخالفيه. وكذلك استبدلنا شرط الانعكاسية بالشرط التالي :

xRx لكل $x \in X$ بالإضافة لشرط التعدي والتحالف .يقال عن R بأنها علاقة ترتيب حدي (Strict order)

المجموعة غير الخالية X مع علاقة الترتيب الجزئي R على X تسمى مجموعة مرتبة جزئيا (Partially order set) أي أن الثنائي (X, R) يسمى مجموعة مرتبة جزئيا

ملاحظـــة

يستعمل الرمز $\leq$ ليدل على علاقة الترتيب الجزئي على المجموعة غير الخالية X بدلا من الحرف R وكل زوج مرتب (x,y) في العلاقة يكتب بالصورة $x \leq y$ ويقرا (x يسبق y) أو (y يلي x) .ويكتب أيضا $x < y$ للدلالة على أن $x \neq y$, $x \leq y$ وأخيرا إذا كانت $(X,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا فنستخدم الرمز X بدلا من $(X,\leq)$ في حالة عدم وجود التباس

ترميز

لتكن N تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية ، Z تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة، Q تمثل مجموعة الأعداد النسبية، R تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية و C تمثل مجموعة الأعداد العقدية

مثال (2.2)

كل من $(C,\leq)$, $(R,\leq)$, $(Q,\leq)$, $(Z,\leq)$, $(N,\leq)$ تكون مجموعة مرتبة جزئيا

تعريف (3.2)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا وليكن $x,y \in X$ يقال عن العنصرين x,y بأنهما قابلين للمقارنة (Comparable) إذا كان $x \leq y$ أو $y \leq x$.

لتكن A مجموعة جزئية في X . يقال عن المجموعة A بأنها مرتبة كليا (Totally ordered) (وتسمى أحيانا سلسله chain) في X إذا كان كل عنصرين في X قابلين للمقارنة.وبصورة عامة يقال عن X بأنها مرتبة كليا إذا كان كل عنصرين في X قابلين للمقارنة .

ملاحظة

(1) كل مجموعة جزئية من مجموعة مرتبة كليا تكون مرتبة كليا
(2) غالبا ما يقال لمجموعة أنها مرتبة إذا كانت مرتبة جزئيا أو كليا

مثال (4.2)

كل من $(R,\leq)$, $(Q,\leq)$ تكون مجموعة مرتبة كليا ولكن $(C,\leq)$ ليست مجموعة مرتبة كليا.

تعريف (5.2)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا وليكن $a,b \in X$ يقال عن a بأنه عنصر أول (First Element) أو عنصر اقل (Smallest Element) أو (Least Element) في X إذا كان $a \leq x$ لكل $x \in X$. يقال عن b بأنه عنصر أخير (Last Element) أو عنصر اكبر (Greatest Element) في X إذا كان $x \leq b$ لكل $x \in X$.

ملاحظة

إذا احتوت المجموعة X على عنصر أول (أو عنصر أخير) فانه وحيد . بعبارة أخرى :كل مجموعة مرتبة جزئيا تحتوي على الأكثر عنصر أول (عنصر أخير) واحد .

تعريف (6.2)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا .يقال عن X بأنها حسنة الترتيب (Well Ordered) أو مرتبة ترتيبا حسنا إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية من X تحتوي على عنصر أول

ملاحظة

(1) كل مجموعة حسنة الترتيب تكون مرتبة كليا
(2) كل مجموعة جزئية من مجموعة حسنة الترتيب تكون حسنة الترتيب .

تعريف (7.2)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا وليكن $a,b\in X$ يقال عن a بأنه عنصر اصغر (Minimal Element) في X إذا تحقق الشرط الأتي :

كلما وجد $x\in X$ بحيث أن $x\le a$ فان $a=x$

ويقال عن b بأنه عنصر أعظم (Maximal Element) في X إذا تحقق الشرط التالي

كلما وجد $x\in X$ بحيث أن $b\le x$ فان $b=x$

ملاحظة

(1) إذا كان a عنصر أول في X فأنة عنصر اصغر ووحيد والعكس غير صحيح دائما
(2) إذا كان b عنصر أخير في X فأنة عنصر أعظم ووحيد والعكس غير صحيح دائما

مثال (8.2)

(1) إذا كانت $A=\{-3,-2,-1,0,1,4,7\}$ فان $\min A=-3,\quad \max A=7$

(2) $\min N=1$ و $\max N$ غير موجود

(3) كل من $\min Z$ و $\max Z$ غير موجود

(4) إذا كانت $A=\{\frac{1}{n}:n\in Z\}$ فان $\max A=1$ و $\min A$ غير موجود

(5) إذا كانت $A=\{-\frac{1}{n}:n\in Z\}$ فان $\min A=-1$ و $\max A$ غير موجود

(6) إذا كانت $A=\{\pm\frac{1}{n}:n\in Z\}$ فان $\max A=1$ و $\min A=-1$

تعريف (9.2)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا ولتكن $A\subseteq X$ يقال عن العنصر $a\in X$ (ليس من الضروري أن يكون $a\in A$) بأنه قيد أسفل (Lower Bound) للمجموعة A إذا كان $a\le x$ لكل $x\in A$. ويقال عن a بأنه اكبر قيد أسفل (Greatest of Lower Bound) للمجموعة A إذا كان

(1) a قيد أسفل للمجموعة A
(2) $a'\le a$ لكل قيد أسفل a' لمجموعة A

ويرمز للعنصر الذي يكون اكبر قيد أسفل للمجموعة A بالرمز $\inf A$ أو $\text{glb}\, A$

ملاحظة

(1) ليس من الضروري إن يكون $\inf A$ موجودا
(2) إذا كان $\inf A$ موجود فانه ليس من الضروري أن ينتمي إلى المجموعة A
(3) إذا كان $\inf A$ موجود فانه وحيد

تعريف (10.2)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا ولتكن $A \subseteq X$ يقال عن العنصر $b \in X$ (ليس من الضروري أن يكون $b \in A$) بأنه قيد أعلى (Upper Bound) للمجموعة A إذا كان $x \leq b$ لكل $x \in A$ ويقال عن b بأنه اصغر قيد أعلى (Least of Upper Bound) للمجموعة A إذا كان

(1) b قيد أعلى للمجموعة A
(2) $b \leq b'$ لكل قيد أعلى b' للمجموعة A

ويرمز للعنصر الذي يكون اصغر قيد أعلى للمجموعة A بالرمز $\sup A$ أو $\text{lub}\, A$

ملاحظة

(1) ليس بالضرورة أن يكون $\sup A$ موجود
(2) إذا كان $\sup A$ موجود فأنة ليس بالضرورة أن ينتمي إلى A
(3) إذا كان $\sup A$ موجود فأنة وحيد
(4) إذا كان كل من $\inf A$ و $\sup A$ موجود فان $\inf A \leq \sup A$

مثال (11.2)

(1) إذا كانت $A = \{x \in R : x \leq 2\}$ فان $\sup A = 2$ و $\inf A$ غير موجود
(2) إذا كانت $A = \{x \in R : -4 \leq x \leq 5\}$ فان $\sup A = 5$ و $\inf A = -4$

تعريف (12.2)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا ولتكن $A \subseteq X$.يقال عن المجموعة A بأنها مقيدة من الأسفل (Bounded Below) إذا وجد لها قيد أسفل (أي إذا وجد $a \in X$ بحيث أن $a \leq x$ لكل $x \in A$) .ويقال عن المجموعة A بأنها مقيدة من الأعلى (Bounded Above) إذا وجد لها قيد أعلى (أي إذا وجد $b \in X$ بحيث أن $x \leq b$ لكل $x \in A$) ونقول عن المجموعة A بأنها مقيدة (Bounded) إذا كانت A مقيدة من الأسفل ومقيدة من الأعلى

تعريف (13.2)

لتكن X مجموعة مرتبه جزئيا . يقال عن X بأنها كاملة (Complete) أو مرتبة كاملة (Complete ordered) إذا كان لكل مجموعة جزئية غير خالية ومقيدة من الأعلى A في X فان $\sup A$ موجودة.

وهذا يكافئ :كل مجموعة جزئية غير خالية ومقيدة من الأسفل B في X فان $\inf B$ موجود

3. الأعداد الحقيقية Real Numbers

توجد طرق مختلفة لبناء الأعداد الحقيقية والتي لا مجال لذكرها ألان وسوف نكتفي بافتراض مجموعة غير خالية R مع ثلاث خواص والتي هي : بديهيات الحقل ، بديهيات الترتيب ، بديهية الكمال . تسمى R مجموعة الأعداد الحقيقية **(Set of Real Numbers)**

أولا: بديهيات الحقل Axioms of Field

سوف نفترض بالإضافة إلى وجود مجموعة الأعداد الحقيقية عمليتين الأولى هي عملية الجمع والتي تقضي بأنة لأي عددين حقيقيين x, y يوجد عدد حقيقي يمثل بالرمز $x+y$ ويسمى حاصل جمع x مع y . والعملية الثانية هي عملية الضرب والتي تقضي بأنه لأي عددين حقيقيين x, y يوجد عدد حقيقي يمثل بالرمز xy ويسمى حاصل ضرب x في y . وتتصف هاتان العمليتان بالخواص التي تطرحها البديهيات التالية :

(1) بديهية الإبدال

(ا) $x+y=y+x$ لكل $x, y \in R$

(ب) $xy=yx$ لكل $x, y \in R$

(2) بديهية التجميع

(ا) $x+(y+z)=(x+y)=z$ لكل $x, y, z \in R$

(ب) $x(yx)=(xy)z$ لكل $x, y, z \in R$

(3) بديهية التوزيع

$x(y+z)=xy+xz$ لكل $x, y, z \in R$

(4) بديهية العنصر المحايد

(ا) يوجد $0 \in R$ بحيث أن $x+0=0+x=x$. يسمى العدد 0 بالمحايد الجمعي

(ب) يوجد $1 \in R$ بحيث أن $x.1=1.x=x$. يسمى العدد 1 بالمحايد الضربي

(5) بديهية العنصر النظير

(ا) لكل $x \in R$ يوجد $(-x) \in R$ بحيث أن $x+(-x)=(-x)+x=0$.

يسمى العدد $(-x)$ بالنظير الجمعي إلى x وللسهولة يكتب $-x$ بدلا من $(-x)$.

(ب) لكل $x \in R$, $x \neq 0$ يوجد $y \in R$ بحيث أن $xy=yx=1$ ويسمى العدد y بالنظير ألضربي إلى x ويرمز له بالرمز x^{-1}

المبرهنة التالية تبين الخواص العامة للحقل وسنترك برهانها للقارئ لأنة ينتج مباشرة من التعريف.

مبرهنة (1.3)

ليكن $x, y, z \in R$

(1) $-(x-y)=y-x$

(2) $x-y=x+(-y)$
(3) $x+z=y+z$ إذا وفقط إذا كان $x=y$
(4) إذا كان $z\neq 0$ فان $xz=yz$ إذا وفقط إذا كان $x=y$
(5) $xy=0$ إذا وفقط إذا كان $x=0$ أو $y=0$
(6) $(-x)y=x(-y)=-xy$
(7) $-(-x)=x$
(8) إذا كان $x\neq 0$ فان $(x^{-1})^{-1}=x$ و $(-x)^{-1}=-x^{-1}$

ثانيا : بديهيات الترتيب *Axioms of Order*

توجد مجموعة جزئية غير خالية من R يرمز لها بالرمز R_+ وتحقق البديهيات التالية :

(1) إذا كان $x,y\in R_+$ فان $x+y\in R_+$ و $xy\in R_+$
(2) إذا كان $x\in R$ فان واحد فقط من العبارات التالية صادقة
$-x\in R_+$, $x=0$, $x\in R_+$

الأعداد التي تنتمي إلى R_+ تسمى أعداد موجبة (أي أن R_+ تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة). العدد الحقيقي x هو عدد سالب إذا وفقط إذا كان $-x\in R_+$. ومجموعة الأعداد الحقيقية السالبة يرمز لها بالرمز R_- والصفر ليس موجبا أو سالبا وعلية

$R=R_-\cup\{0\}\cup R_+$

تعريف (2.3)

لتكن $x,y\in R$ يقال عن x بأنه اقل من y (يكتب $x<y$) إذا كان $y-x\in R_+$ ويقال عن x بأنه اكبر من y (يكتب $x>y$) إذا كان $y<x$ ،أي إذا كان $x-y\in R_+$ وعلية يكون $x<y$ إذا وفقط إذا كان $y>x$

رموز

(1) $x\leq y$ تعني أما $x<y$ أو $x=y$ وتقرا x اقل أو يساوي y
(2) $x\leq y<z$ تعني $x\leq y$ و $y<z$

بسهولة يمكن إثبات $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على R وهذا يعني أن R مجموعة مرتبة

مبرهنة (3.3)

(1) لكل $x,y\in R$ فأما $x<y$ أو $x>y$ أو $x=y$
(2) إذا كان $x<y$ وكانت $y<z$ فان $x<z$
(3) $x+z<y+z$ إذا وفقط إذا كان $x<y$
(4) إذا كان $x<y$ وكانت $z<w$ فان $x+z<y+w$
(5) إذا كان $z>0$ فان $xz<yz$ إذا وفقط إذا كان $x<y$

(6) إذا كان $z<0$ فان $xz<yz$ إذا وفقط إذا كان $x>y$
(7) إذا كان $0<x<y$ وكانت $0<z<w$ فان $xz<yw$

ثالثا : بديهية الكمال *The Completeness Axiom*

لتكن **A** مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية R
(1) إذا كانت المجموعة A مقيدة من الأعلى فان A لها اصغر قيد أعلى(أي أن $\sup A$ موجود)
(2) إذا كانت المجموعة **A** مقيدة من الأسفل فان A لها اكبر قيد أسفل (أي أن $\inf A$ موجود)
نظام الأعداد الحقيقية R حقل مرتب

مبرهنة (4.3)

لتكن **A** مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية R وليكن $a,b\in R$ فان
(1) $\inf A=a$ إذا وفقط إذا كان
(ا) $a\le x$ لكل $x\in A$
(ب) لكل عدد حقيقي موجب ε ($\varepsilon>0$)، يوجد $y\in A$ بحيث أن $y<a+\varepsilon$
(2) $\sup A=b$ إذا وفقط إذا كان
(ا) $x\le b$ لكل $x\in A$
(ب) لكل عدد حقيقي موجب ε ($\varepsilon>0$)، يوجد $y\in A$ بحيث أن $y>b-\varepsilon$

البرهان:

(1)

الاتجاه الأول: نفرض $\inf A=a$

$\Leftarrow$ a قيد أسفل للمجموعة A $\Leftarrow$ $a\le x$ لكل $x\in A$ $\Leftarrow$ الشرط (1) متحقق

ألان نبرهن الشرط (2)

ليكن $\varepsilon>0$ $\Leftarrow$ $a+\varepsilon>a$

بما أن a اكبر قيد أسفل للمجموعة A $\Leftarrow$ $a+\varepsilon$ ليس قيد أسفل للمجموعة A

$\Leftarrow$ يوجد $z\in A$ بحيث $z<a+\varepsilon$.

الاتجاه الأخر: نفرض الشرطيين (1) و(2) متحققين

الشرط الأول يبين أن a قيد أسفل للمجموعة A

ليكن $c\in R$ بحيث أن $a<c$. يجب أن نبرهن على أن c ليس أسفل للمجموعة A

نضع $\varepsilon=c-a$ $\Leftarrow$ $\varepsilon>0$

$\Leftarrow$ يوجد $y\in A$ (حسب الشرط 2) بحيث $y<a+\varepsilon$ $\Leftarrow$ $y<a+(c-a)=c$.

وهذا يبين أن c ليس قيد أسفل للمجموعة A وعلية a اكبر قيد أسفل للمجموعة A $\Leftarrow$ $\inf A=a$

(2)

الاتجاه الأول: نفرض $\sup A=b$

$\Leftarrow$ b قيد أعلى للمجموعة A $\Leftarrow$ $x\le b$ لكل $x\in A$ $\Leftarrow$ الشرط (1) متحقق

ألان نبرهن الشرط (2)

ليكن $\varepsilon > 0 \Leftarrow -\varepsilon < 0 \Leftarrow b-\varepsilon < b$

بما أن b اصفر قيد أعلى للمجموعة $A \Leftarrow b-\varepsilon$ ليس قيد أعلى للمجموعة A

$\Leftarrow$ يوجد $z \in A$ بحيث $b-\varepsilon < y$.

الاتجاه الأخر: نفرض الشرطيين (1) و(2) متحققين

الشرط الأول يبين أن b قيد أعلى للمجموعة A

ليكن $d \in R$ بحيث أن $d < b$. يجب أن نبرهن على أن d ليس أعلى للمجموعة A

نضع $\varepsilon = b-d \Leftarrow \varepsilon > 0$

$\Leftarrow$ يوجد $y \in A$ (حسب الشرط 2) بحيث $y > b-\varepsilon \Leftarrow y > b-(b-d) = d$.

وهذا يبين أن d ليس قيد أعلى للمجموعة A وعلية b اصغر قيد أعلى للمجموعة $A \Leftarrow \sup A = b$

مبرهنة (5.3) (خاصية ارخميدس)

إذا كان كل من x, y عددا حقيقيا وكان $x > 0$ فأنة يوجد $n \in Z^+$ بحيث أن $nx > y$

البرهان:

سنبرهن بطريقة التناقض (نفرض الخاصية غير صحيحة)

نفرض يوجد $a,b \in R$ بحيث أن $a > 0$ وان $na \le b$ لكل $n \in N$

نضع $A = \{na : n \in N\}$

بما أن $1 \cdot a = a \in A \Leftarrow A$ مجموعة جزئية غير خالية في R

بما أن $na \le b$ لكل $n \in N \Leftarrow b$ قيد أعلى للمجموعة $A \Leftarrow A$ مجموعة مقيدة من الأعلى

بما أن R تحقق خاصية الكمال $\Leftarrow$ يوجد $y \in R$ بحيث $y = \sup A$

بما أن $a > 0 \Leftarrow -a < 0 \Leftarrow y - a < y$

بما أن y اصغر قيد أعلى للمجموعة $A \Leftarrow y-a$ ليس قيد أعلى للمجموعة A

$\Leftarrow$ يوجد $m \in N$ بحيث $y - a \le ma \Leftarrow y \le ma + a \Leftarrow y \le (m+1)a$

بما أن $m+1 \in N \Leftarrow (m+1)a \in A \Leftarrow y$ ليس قيد أعلى للمجموعة $A \Leftarrow A$ وهذا تناقض

نتيجة(6.3)

(1) لكل عدد حقيقي موجب x يوجد عدد صحيح موجب n بحيث أن $\frac{1}{n} < x$

(2) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $n > x$

(3) لكل عدد حقيقي x يوجد عددان صحيحان m,n بحيث أن $m < x < n$

(4) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح واحد فقط n بحيث أن $n \le x < n+1$

(5) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث أن $x-1 < n \le x$

(6) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث أن $x-1 \le n < x$

البرهان:

(1)

نضع $a=\varepsilon,\ \ b=1$ $\Leftarrow$ حسب خاصية ارخميدس يوجد عدد صحيح موجب n بحيث

$$na>b \ \Leftarrow\ n\varepsilon>1 \ \Leftarrow\ \frac{1}{n}<\varepsilon$$

(2)

نضع $a=1,\ \ b=x$ $\Leftarrow$ حسب خاصية ارخميدس يوجد عدد صحيح موجب n بحيث

$$na>b \ \Leftarrow\ n>x$$

(3)

بما أن x عدد حقيقي ،حسب (2) يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $n>x$

ألان يجب أن نبرهن يوجد عدد صحيح موجب m بحيث $m<x$

نضع $A=\{k\in Z: k>-x\}$ $\Leftarrow$ A مجموعة جزئية غير خالية في R و مقيدة من الأسفل

بما أن R يحقق خاصية الكمال $\Leftarrow$ يوجد $y\in R$ بحيث $\inf A=y$

$$y>-x \ \Leftarrow\ -y<x \ \Leftarrow$$

نضع $m=-y$ $\Leftarrow$ $m<x$

(4)

نضع $A=\{m\in Z: m\le x\}$ $\Leftarrow$ A مجموعة جزئية غير خالية في R و مقيدة من الأعلى

بما أن R يحقق خاصية الكمال $\Leftarrow$ يوجد $n\in R$ بحيث $\sup A=n$ $\Leftarrow$ $n\le x$

بقي أن نبرهن $x<n+1$. نفرض $n+1\le x$ $\Leftarrow$ $n+1\in A$ وهذا تناقض $\sup A=n$

برهان الوحدانية واضح لان sup وحيد.

برهان 5، 6 يترك للقارئ.

4. حقل الأعداد النسبية Filed of Rational Numbers

مبرهنة(1.4)

كل حقل مرتب يحتوي على حقل جزئي يشابه حقل الأعداد النسبية

البرهان :

ليكن $(F,+,\cdot)$ حقلا مرتبا وليكن 0 العنصر المحايد الجمعي، 1 العنصر المحايد الضربي في F.

نرمز للعدد $1+1+\cdots+1$ n من المرات بالرمز $n\cdot 1$ حيث n عدد صحيح غير سالب

$$n\cdot 1=1+1+\cdots+1$$

الآن: نريد أن نبرهن : إذا كان $n\cdot 1=0$ فان $n=0$ سنبرهن بطريقة التناقض: نفرض k اصغر عدد صحيح موجب بحيث $k\cdot 1=0$

بما أن $k\cdot 1 = 1+1+\cdots+1$ k من المرات $\Leftarrow$ $k>1$ $\Leftarrow$ $k-1>0$ $\Leftarrow$ $(k-1)\cdot 1>0$
وعلية $0<(k-1)\cdot 1<k\cdot 1=0$ وهذا غير ممكن. إذن إذا كان $n\cdot 1=0$ فان $n=0$ وبذلك نستنتج أن F يحتوي على عناصر من النوع $n\cdot 1$ لكل عدد صحيح غير سالب n وان $n\cdot 1=0$ إذا وفقط إذا كان $n=0$ وكذلك $m\cdot 1=n\cdot 1$ إذا وفقط إذا كان $m=n$

بما أن $(F,+,\cdot)$ حلقة فان F يحتوي على كل العناصر $(n\cdot 1)$ حيث $-n\cdot 1$ هو $(-1)+(-1)+\cdots+(-1)$ n من المرات

ولهذا يمكن القول أن F يحتوي على نسخة من مجوعة الأعداد الصحيحة Z

بما أن $(F,+,\cdot)$ حقل $\Leftarrow$ لكل $n\neq 0,\quad n\in Z$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n}\in F$ وعلية نستنتج أن F يحتوي على نسخة من حقل الأعداد النسبية.

وألان : نستنتج حفل الأعداد الحقيقية R يحتوي على حقل الأعداد النسبية Q لان R حقل مرتب وعلية $Q\subset R$. والسؤال الذي يطرح هنا : هل أن $Q=R$؟ للإجابة على هذا السؤال نحتاج الحقائق الآتية :

مبرهنة(2.4)

لايوجد للمعادلة $x^2=2$ جذر في حقل الأعداد النسبية

البرهان :

سنبرهن بطريقة التناقض: نفرض أن $y\in Q$ بحيث أن $y^2=2$

بما أن $y\in Q$ $\Leftarrow$ $y=\frac{a}{b}$ حيث a,b أعداد صحيحة ، $b\neq 0$ و $g.c.d(a,b)=1$

يما أن $y^2=2$ $\Leftarrow$ $\frac{a^2}{b^2}=2$ $\Leftarrow$

$$a^2=2b^2 \qquad \cdots(1)$$

بما أن $2b^2$ عدد زوجي $\Leftarrow$ a^2 عدد زوجي $\Leftarrow$ a عدد زوجي

$\Leftarrow$ $a=2c$ $\Leftarrow$ $a^2=4c^2$

بما أن $a^2=2b^2$ $\Leftarrow$ $4c^2=2b^2$ $\Leftarrow$ $b^2=2c^2$

$\Leftarrow$ b^2 عدد زوجي $\Leftarrow$ b عدد زوجي $\Leftarrow$ $g.c.d(a,b)=2$ وهذا تناقض $\Leftarrow$ $y\notin Q$ وعلية لايوجد للمعادلة $x^2=2$ جذر في حقل الأعداد النسبية

مبرهنة(3.4)

للمعادلة $x^2=2$ جذر حقيقي موجب واحد فقط

البرهان :

لتكن $A=\{x\in Q: x>0,\quad x^2<2\}$ $\Leftarrow$ $A\neq\phi$ لان مثلا $1\in A$. وكذلك A مقيدة من الأعلى لان مثلا 3 قيد أعلى لها.

بما أن R تحقق خاصية الكمال وان A مجموعة غير خالية ومقيدة من الأعلى.
$\Leftarrow$ يوجد $y \in R$ بحيث $y = \sup A$
ألان : نريد أن نبرهن $y^2 = 2$. سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $y \neq 2$. هنالك احتمالان هما أما $y^2 < 2$ أو $y^2 > 2$

(1) إذا كان $y^2 < 2 \Leftarrow y^2 - 2 < 0 \Leftarrow 2 - y^2 > 0$
لتكن $\lambda \in R$ بحيث أن $0 < \lambda < 1$
$(y+\lambda)^2 = y^2 + 2\lambda y + \lambda^2 = y^2 + \lambda(2y+\lambda)$
بما أن $\lambda < 1 \Leftarrow 2y + \lambda < 2y + 1$
بما أن $\lambda > 0 \Leftarrow \lambda(2y+\lambda) < \lambda(2y+1) \Leftarrow y^2 + \lambda(2y+\lambda) < y^2 + \lambda(2y+1)$
وعلية $(y+\lambda)^2 < y^2 + \lambda(2y+1)$

(ا) إذا كانت $\lambda < \dfrac{2-y^2}{2y+1}$
$(y+\lambda)^2 < y^2 + \lambda(2y+1) < y^2 + 2 - y^2 = 2$
بما أن $y > 0$ و $\lambda > 0 \Leftarrow y + \lambda > 0$
$\Leftarrow y + \lambda \in A \Leftarrow (y+\lambda)^2 < 2,\ y + \lambda > 0$
بما أن y قيد أعلى للمجوعة $A \Leftarrow y + \lambda \le y \Leftarrow \lambda \le 0$ وهذا تناقض لان

(ب) إذا كانت $\lambda \ge \dfrac{2-y^2}{2y+1}$. نضع $\alpha = \dfrac{2-y^2}{2y+1} \Leftarrow \alpha \le \lambda$
بما أن $y > 0 \Leftarrow 2y + 1 > 0$ وكذلك بما أن $2 - y^2 > 0 \Leftarrow \alpha > 0$
بما أن $\lambda < 1 \Leftarrow \alpha < 1$ وعلية $0 < \alpha < 1$ وكذلك نحصل
$(y+\alpha)^2 < y^2 + \alpha(2y+1) = y^2 + 2 - y^2 = 2$
$\Leftarrow y + \alpha \in A \Leftarrow \alpha \le 0$ (نفس الطريقة في ا) وهذا تناقض

(2)
إذا كان $y^2 > 2 \Leftarrow y^2 - 2 > 0$
لتكن $\beta \in R$ بحيث أن $0 < \lambda < 1$
$(y-\beta)^2 = y^2 - 2\beta y + \beta^2 = y^2 - \beta(2y-\beta)$

بما أن $0 < \beta < 1 \Leftarrow -\beta < \beta < 1 \Leftarrow 2y - \beta < 2y + 1$
$\beta > 0 \Leftarrow \beta(2y-\beta) < \beta(2y+1)$
$\Leftarrow -\beta(2y-\beta) > -\beta(2y+1) \Leftarrow y^2 - \beta(2y-\beta) > y^2 - \beta(2y+1)$
$(y-\beta)^2 > y^2 - \beta(2y+1)$

(ا) إذا كانت $\beta \le \dfrac{y^2-2}{2y+1}$ فان

$(y-\beta)^2 > 2 \Leftarrow y^2 - \beta(2y+1) \geq 2 \Leftarrow -\beta(2y+1) \geq 2 - y^2 \Leftarrow \beta(2y+1) \leq y^2 - 2$

$y-\beta$ قيد أعلى للمجوعة A

بما أن y اصغر قيد أعلى للمجوعة $A \Leftarrow y \leq y-\beta \Leftarrow 0 \leq \beta$ وهذا تناقض.

(ب) إذا كانت $\beta > \frac{y^2-2}{2y+1}$. نضع $\gamma = \frac{y^2-2}{2y+1}$ ونفس الطريقة نثبت أن $0 < \gamma < 1$ و

$(y-\gamma)^2 > 0$ وهذا يؤدي $y-\gamma$ قيد أعلى للمجوعة A. وبذلك يكون $y \leq y-\gamma$ وعلية $\gamma \leq 0$ وهذا تناقض.

نستنتج من وجود التناقض في كل من (1) و (2) يؤدي إلى $y^2 = 2$ ، أي أن y جذر حقيقي موجب للمعادلة $x^2 = 2$

الآن : نبرهن على أن هذا الجذر الموجب y يكون وحيدا

نفرض أن z عدد حقيقي موجب أخر $(z \neq y)$ بحيث أن $z^2 = 2$

بما أن $z \neq y$ $z > 0$ و $z \neq y$

$\Leftarrow$ أما $z > y$ أو $z < y$

بما أن $y > 0$ و $z > 0$

$\Leftarrow$ أما $z^2 > y^2$ أو $z^2 < y^2$

$\Leftarrow$ أما $2 > 2$ أو $2 < 2$ وهذا تناقض $\Leftarrow z = y$

نتيجة(4.4)

حقل الأعداد النسبية حقل جزئي فعلي من حقل الأعداد الحقيقية

البرهان :

بما أن المعادلة $x^2 = 2$ تمتلك جذر حقيقي والذي يرمز له بالرمز $\sqrt{2} \Leftarrow \sqrt{2} \in R$

وبما أن المعادلة $x^2 = 2$ لاتمتلك جذر في $Q \Leftarrow \sqrt{2} \notin Q$

ملاحظة

باستخدام نفس الأسلوب المستخدم في برهان المبرهنة السابقة ، يمكن أن نبرهن المبرهنة الآتية :

مبرهنة(5.4)

لكل عدد حقيقي موجب a ولكل عدد صحيح موجب n ، يوجد عدد حقيقي موجب واحد فقط يحقق المعادلة $x^n = a$. ويرمز لهذا العدد الوحيد بالرمز $\sqrt[n]{a}$ أو $a^{\frac{1}{n}}$ ونطلق علية بالجذر النوني للعدد a.

مبرهنة(6.4)

حقل الأعداد النسبية غير كامل

البرهان :
لأجل برهان هذه المبرهنة يكفي أن نبرهن وجود مجموعة جزئية غير خالية من Q مقيدة من الأعلى وليس لها اصغر قيد أعلى.
لتكن $A=\{x\in Q: x^2<2\}$ $\Leftarrow$ $A\neq\phi$ لان مثلا $1\in A$ وكذلك A مقيدة من الأعلى لان مثلا 3 قيد أعلى إلى A.
ألان : سنبرهن على أن $\sup A$ غير موجود . نبرهن بطريقة التناقض: نفرض يوجد $y\in Q$ بحيث أن $\sup A=y$
$\Leftarrow$ $y^2=2$ أو $y^2<2$ أو $y^2>2$
(1)
$y^2\neq 2$ لأنه لايوجد عدد نسبي مربعه يساوي 2
(2)
إذا كان $y^2<2$ ، نضع $z=\frac{4+3y}{3+2y}$ $\Leftarrow$ $z\in Q$

$$z^2-2=(\frac{4+3y}{3+2y})^2-2=\frac{y^2-2}{(3+2y)^2}<0 \qquad (\text{لان } y^2<2)$$

$\Leftarrow$ $z^2<2$ $\Leftarrow$ $z\in A$

$$\Leftarrow \quad z-y=\frac{4+3y}{3+2y}-y=\frac{2(2-y^2)}{3+2y}>0 \quad \Leftarrow \quad z>y$$

وهذا تناقض لان y قيد أعلى إلى A
(3)
إذا كان $y^2>2$ $\Leftarrow$ $z^2>2$ $\Leftarrow$ z قيد أعلى إلى A
وهذا تناقض لان y اصغر قيد أعلى إلى A
وعلية لايوجد عدد نسبي بحيث يكون اصغر قيد أعلى إلى A

مبرهنة (7.4) (كثافة الأعداد النسبية)

ليكن $a,b\in R$ بحيث أن $a<b$ ، يوجد عدد نسبي r بحيث إن $a<r<b$ وعلية فانه يوجد عدد غير منتهي من الأعداد النسبية بين أي عددين حقيقيين

البرهان :
(1)
إذا كان $0<a<b$
(ا) عندما $b-a>1$ ، نضع $A=\{n\in N: n>a\}$
بما أن $a\in R$ $\Leftarrow$ حسب خاصية ارخميدس، يوجد $m\in N$ بحيث $m>a$
$\Leftarrow$ $m\in A$ $\Leftarrow$ $A\neq\phi$
بما أن N مجموعة مرتبة ترتيب حسن وان A مجموعة جزئية غير خالية من N
$\Leftarrow$ A تحتوي على اصغر عنصر وليكن k

بما أن $k \in A \Leftarrow k > a$
بما أن k اصغر عنصر في $A \Leftarrow k-1 \notin A \Leftarrow k-1 \le a \Leftarrow k \le a+1$
بما أن $b-a>1 \Leftarrow b > a+1 \Leftarrow k < b$ وعلية $a < k < b$
وكذلك يكون k هو العدد النسبي المطلوب
(ب) عندما $b-a \le 1$
بما أن $a < b \Leftarrow b-a > 0$
بالاستخدام خاصية ارخميدس يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $n(b-a) > 1$
$\Leftarrow nb - na > 1$ وحسب الحالة (ا) يوجد k بحيث $na < k < nb$
$\Leftarrow a < \frac{k}{n} < b$ ويكون $\frac{k}{n}$ هو العدد النسبي المطلوب
(2)
إذا كان $a < 0 < b$ فان 0 هو العدد النسبي المطلوب
(3)
إذا كان $a < b < 0 \Leftarrow 0 < -b < -a$ حسب الحالة (1) يوجد $r \in Q$ بحيث ان
$-b < r < -a \Leftarrow a < -r < b$ فيكون $-r$ هو العدد النسبي المطلوب

5. الأعداد غير النسبية Irrational Numbers

لتكن Q^c تمثل المجموعة المتممة (المكملة) لمجموعة الأعداد النسبية Q في مجموعة الأعداد الحقيقية R

$$Q^c = R \mid Q = \{x \in R : x \notin Q\}$$

يطلق على المجموعة Q^c مجموعة الأعداد غير النسبية
بما أن $Q^c \neq \phi \Rightarrow \sqrt{2} \in Q^c$

مبرهنة(1.5)

إذا كان $x \in Q$ وكان $y \in Q^c$ فان
(1) $x + y \in Q^c$
(2) $xy \in Q^c$ بشرط $x \neq 0$

الرهان :
(1)
سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $x + y \notin Q^c$
بما أن $x + y \in R \Leftarrow x + y \in Q$
بما أن $x \in Q$ وان Q حقل $\Leftarrow -x \in Q$ وكذلك $(x+y)+(-x) \in Q \Leftarrow y \in Q$ وهذا تناقض.
(2)
سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $xy \notin Q^c \Leftarrow xy \in Q$