بما أن Q حقل وان $x \in Q$ ، $x \neq 0 \Leftarrow \frac{1}{x} = x^{-1} \in Q$ وكذلك $\frac{1}{x}(xy) \in Q \Leftarrow y \in Q$ وهذا تناقض.

مبرهنة(2.5) (كثافة الأعداد غير النسبية)

ليكن $a,b \in R$ بحيث أن $a < b$ يوجد عدد غير نسبي s بحيث $a < s < b$ وعلية فأنة يوجد عدد غير منتهي من الأعداد غير النسبية بين أي عددين حقيقيين

الرهان :

بما أن $a < b \Leftarrow a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$

بما أن كل من $a - \sqrt{2}$ و $b - \sqrt{2}$ عدد حقيقي

باستخدام كثافة الأعداد النسبية يوجد $r \in Q$ بحيث أن $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$

$\Leftarrow a < r + \sqrt{2} < b$

بما أن r عدد نسبي و $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي $s = r + \sqrt{2}$ عدد غبر نسبي وعلية $a < s < b$

ألان :

بما أن $a < s \Leftarrow$ يوجد عدد غير نسبي s_1 بحيث أن $a < s_1 < s$

وباستمرار هذه العملية نحصل على عدد غير منتهي من الأعداد غير النسبية تقع بين a و b.

تعريف(3.5)

ليكن $a,b \in R$ بحيث أن $a < b$

$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$

$[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

$(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$

$(-\infty,b) = \{x \in R : -\infty < x < b\}$

$(-\infty,b] = \{x \in R : -\infty < x \leq b\}$

$(a,\infty) = \{x \in R : a < x < \infty\}$

$[a,\infty) = \{x \in R : a \leq x < \infty\}$

حسب كثافة الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية نستطيع أن نقول : كل فترة من الأعداد الحقيقية تحتوي على عدد غير منته من الأعداد النسبية وعلى عدد غير منه من الأعداد غير النسبية .أي انه لاتوجد فترات تتكون من أعداد نسبية فقط أو أعداد غير نسبية فقط

6. القيمة المطلقة Absolute Value

تعريف(1.6)

ليكن x عددا حقيقيا. القيمة المطلقة **(Absolute Value)** إلى x ، و يرمز لها بالرمز $|x|$ ويعرف بالصيغة التالية

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

المبرهنة التالية تبين الخواص العامة للحقل وسنترك برهانها للقارئ لأنة ينتج مباشرة من التعريف.

مبرهنة(2.6) (خواص القيمة المطلقة)

(1) $|x| = \max\{-x, x\}$ لكل $x \in R$ وعلية $|x| \geq -x$, $|x| \geq x$

(2) $|x| \geq 0$ لكل $x \in R$

(3) $|x| = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$

(4) $|-x| = |x|$ لكل $x \in R$

(5) $|x - y| = |y - x|$ لكل $x, y \in R$

(6) $|xy| = |x||y|$ لكل $x, y \in R$

(7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ لكل $x, y \in R$, $y \neq 0$

(8) $|x + y| \leq |x| + |y|$ لكل $x, y \in R$

(9) $|x - y| \leq |x| + |y|$ لكل $x, y \in R$

(10) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ لكل $x, y \in R$

(11) $|x| \leq a$ إذا وفقط إذا $-a \leq x \leq a$

بعض المتراجحات المهمة **Some Important Inequalities**

مبرهنة(23.1)

(1) متراجحة هولدر **(Holder's Inequality)** إذا كان $p, q \in R$ بحيث أن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ فان

$$\sum_{i=1} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث x_i, y_i أعداد حقيقية. وبصورة خاصة إذا كانت $p = 2$ فان $q = 2$ وان

$$\sum_{i=1} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

وتسمى متراجحة كوشي– شوار **(Cauchy-Schwars Inequality)**

(2) متراجحة منكوفسكي (**Minkokowsk's Inequality)** إذا كان $p \geq 1$ فان

$$(\sum_{i=1}|x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}|y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

حيث x_i, y_i أعداد حقيقية.

6.1 المجموعات القابلة للعد Countable Sets

تعريف (1.6.1)

لتكن كل من A,B مجموعة . يقال عن المجموعة A بأنها تكافئ المجموعة B (Equivalent) ويكتب $(A \sim B)$ إذا وجد دالة تقابلية من المجموعة A على المجموعة B ويكتب $(A \not\sim B)$ إذا كانت A لاتكافئ B .

مبرهنة (2.6.1)

(1) إذا كانت $E=\{2,4,6,...\}$ فان $N \sim E$
($f:N\to E$ معرفة بالصيغة $f(n)=2n$ لكل $n\in N$)

(2) إذا كانت $O=\{1,3.5....\}$ فان $N \sim O$
($f:N\to O$ معرفة بالصيغة $f(n)=2n+1$ لكل $n\in N$)

(3) إذا كانت $N^*=\{0,1,2,3,...\}$ فان $N \sim N^*$
($f:N\to N^*$ معرفة بالصيغة $f(n)=n-1$ لكل $n\in N$)

(4) $Z \sim N^*$ ($f:Z\to N^*$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0\\ 2x-1, & x>0\end{cases}$$

(5) $N \sim Q$

وعلية نستنتج أن المجموعات Q,Z,N^*,N,O,E متكافئة

(6) إذا كانت $A=[0,1]$ وكانت

$$I_1=(a,b), I_2=(a,b], I_3=[a,b), I_4=[a,b]$$

فان $A \sim I_i$ لكل $i=1,2,3,4$

($f:A\to I_i$ معرفة بالصيغة $f(x)=a+(b-a)x$ لكل $x\in A$)

إذا كانت $A=(-1,1)$ وكانت $B(a,b)$ فان $A \sim B$

(2) ($f:A\to B$ معرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{2}(b-a)x+\frac{1}{2}(b+a)$, لكل $x\in A$

(3) إذا كانت $A=(0,1)$ فان $A \sim \Re^+$

($f:A\to R^+$ معرفة بالصيغة $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ لكل $x\in A$)

(4) إذا كانت $A=(-1,1)$ فان $A \sim \Re$

(5) إذا كانت $A=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ فان $A \sim \Re$

($f : A \to \Re$ معرفة بالصيغة $f(x) = \tan x$ لكل $x \in A$)

(6) إذا كانت $A = (0,1)$ فان $A \sim \Re$

(7) لكل k عدد طبيعي ضع $N_K = \{1,2,3,...,k\}$ فان

ا) $N_k \not\sim N$

ب) $N_k \sim N_1$ إذا وفقط إذا كان $k = 1$

(8) $P(X) \not\sim X$ لكل مجموعة X

تعريف (3.6.1)

لتكن A مجموعة ما . يقال عن A بأنها مجموعة منتهية (Finite Set) إذا كانت A مجموعة غير خالية أو تكافئ المجموعة N_k لبعض عدد طبيعي k .ويقال أن A مجموعة غير منتهية (Infinite Set) إذا لم تكن A مجموعة منتهية (أي أن المجموعات غير المنتهية هي مجموعات غير خالية ولا تكافئ N_K لكل عدد طبيعي k)

إذا كانت A مجموعة منتهية فان $N_k \sim A$ لبعض عدد طبيعي k وعلية توجد دالة متقابلة $f : N_k \to A$. ضع $f(i) = a_i$ لكل $a_i \in A \Leftarrow i \in N_k$ لكل $i = 1,2,3,...,k$ وعلية فان $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$

مبرهنة (4.6.1)

(1) لتكن كل من A, B مجموعة غير خالية بحيث أن $A \sim B$

ا) A منتهية إذا وفقط إذا كانت B منتهية

ب) A غير منتهية إذا وفقط إذا كانت B غير منتهية

(2) كل مجموعة منتهية لايمكن أن تكافئ مجموعة جزئية فعلية منها

(3) كل مجموعة جزئية من مجموعة منتهية تكون منتهية

(4) إذا كانت A مجموعة غير منتهية وكانت $A \subset B$ فان B مجموعة غبر منتهية

(5) إذا كانت A مجموعة غير منتهية وكانت B مجموعة ما فان $A \cup B$ تكون غير منتهية

تعريف (5.6.1)

لتكن A مجموعة ما . يقال عن A بأنها مجموعة قابلة للعد (أو يقال معدودة) (Countable Set) إذا كانت A منتهية أو تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية N .يقال عن A بأنها غير منتهية وقابلة للعد إذا كانت A مجموعة غير منتهية وتكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية N .ويقال عن A بأنها غير قابلة للعد (Uncountable) إذا كانت A مجموعة غير منتهية ولا تكافئ N .

مبرهنة (6.6.1)

(1) كل مجموعة منتهية تكون قابلة للعد

(2) كل من $Q, Z, N^*, N, E.O$ مجموعات غير منتهية وقابلة للعد

(3) كل من $\Re$ والفترات في $\Re$ مجموعات غير قابلة للعد

ملاحظـــة

إذا كانـت A مجموعـة غيـر منتهيـة قابلـة للعـد فـان $A \sim N$ وعليـة توجـد دالـة متقابلـة $f : N \to A$ ضع $f(n) = a_n$ لكل $n \in N$ لكل $a_n \in A \Leftarrow n \in N$

وعلية $A = \{a_n : n \in N\} = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$

مبرهنة (7.6.1)

(1) كل مجموعة غير منتهية قابلة للعد تكون مكافئة لمجموعة جزئية فعلية منها

(2) كل مجموعة غير منتهية تحتوي على مجموعة جزئية غير منتهية قابلة للعد

(3) المجموعة $N \times N$ قابلة للعد

(4) إذا كانت كل من A, B مجموعة قابلة للعد فان

ا) المجموعة $A \cup B$ تكون قابلة للعد

ب) المجموعة $A \times B$ تكون قابلة للعد

المصادر

[1] عادل غسان نعوم،"**مقدمة في التحليل الرياضي**"، جامعة بغداد – العراق 1986.

[2] **Apostol, "** Mathematical Analysis**",2 nd, 1974**

[3] **Ash, R. B., "** Real Analysis And Probability**", 1972.**

[4] **Billingsley, P., "** Probability And Measure **" , 1979-1986.**

[5] **Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.,"** Real Variables**" , 1969.**

[6] **Edwin Hewitt Karl Stromberg, "** Real And Abstract Analysis**" , 1978**

[7] **Folland . G. B.,"** Real Analysis**",2 nd, 1999**

[8] **Goldberg, R. R.,"** Methods Of Real Analysis**",1979.**

[9] **Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.,"** Introductory Real Analysis**",1970.**

[10] **Royden, H. L.,"** Real Analysis**",1988**

[11] **Rudin, W., "** Principles Of Mathematical Analysis**",1953**

[12] **Rudin, W., "** Real And Complex Analysis**",19**

[13] **Ruel V. Churchill James W. Brown Roger F. Verhey,"** Complex Variables And Applications**",3 rd, 1974.**

[14] **Scott, D. B., And Tims, S. R.,"** Mathematical Analysis An Introduction**",1966.**

[15] **Sharma, J. N And Vasishtha, A. R.,"** Real Analysis**",5 th, 1977.**

[16] **Walter Rudin,"** Principles Of Mathematical Analysis**",2 nd, 1964.**

[17] **Walter Rudin,"** Real And Complex Analysis**",2 nd, 1974.**

[18] **Walter Rudin,"** Principles Of Mathematical Analysis**",3 rd, 1986.**

محاضرات
الأستاذ المساعد الدكتور نوري فرحان المياحي
قسم الرياضيات – كلية علوم الحاسوب والرياضيات – جامعة القادسية – العراق

ر331
التحليل الرياضي (1) Mathematical Analysis I

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

المحاضرة الثانية

المتتابعات Sequences

تعريف (1)

لتكن X مجموعة غير خالية. الدالة التي منطلقها مجموعة الأعداد الطبيعية N ومستقرها المجموعة X تسمى متتابعة (Sequence) في X .

إذا كانت f متتابعة في X , أي أن $f:N\to X$ دالة, ومن تعريف الدالة نحصل على أن لكل $n\in N$ يوجد عنصر واحد فقط $x_n\in X$ بحيث $f(n)=x_n$. لاحظ أن العناصر x_n تحدد الدالة f بصورة كاملة ولذلك سنرمز للدالة f بالرمز $\{x_n\}$ ويسمى x_n بالحد العام للمتتابعة أو الحد النوني أو الحد ذي الرتبة n للمتتابعة .

المدى للمتتابعة $\{x_n\}$ هي المجموعة $\{x_n : n\in N\}$ ولذا يجب التمييز بين المتتابعة $\{x_n\}$ وبين المدى لها.

مثلاً :

إذا كانت $\{x_n\}$ متتابعة معرفة في R ، حيث $x_n=(-1)^n$ لكل $n\in N$ فأن

$$\{x_n\}=\{(-1)^n\}=\{1,-1,1,-1,\cdots\}$$

إما المدى يمثل المجموعة

$$\{x_n : n\in N\}=\{-1,1\}$$

تعريف (2)

لتكن كل من $\{y_n\},\{x_n\}$ متتابعة في المجموعة X يقال عن $\{y_n\}$ بأنها متتابعة جزئية (Subsequence) من المتتابعة $\{x_n\}$ إذا وجدت الدالة $\varphi:N\to N$ بحيث أن

(1) $y_n=x_n\circ\varphi$

(2) لكل $n\in N$ يوجد $k\in N$ بحيث أن $\varphi(m)\geq n$ لكل $m\geq k$

بعبارة أخرى إذا كانت $\{x_n\}$ متتابعة في X وكانت $\{i_n\}$ متتابعة في N بحيث أن $i_n<i_{n+1}$ لكل $n\in N$ فان $\{x_{i_n}\}$ تسمى متتابعة جزئية للمتتابعة $\{x_n\}$.

مثال(3)

لتكن $x_n = \frac{1}{n}, \sigma_n = \frac{1}{2n-1}$ ،نلاحظ أن $\{\sigma_n\}$ متتابعة جزئية من المتتابعة $\{x_n\}$ لان إذا عرفنا الدالة $\Psi : N \to N$ بالشكل

$$\Psi(n) = 2n-1$$

$$\sigma_n = x_n \circ \Psi = x(\Psi) = \frac{1}{2n-1}$$

وعليه فأن $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ تكون متتابعة جزئية من المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

ملاحـظة

إذا كانت $\{y_n\}$ متتابعة جزئية من المتتابعة $\{x_n\}$و $\{z_n\}$متتابعة جزئية من $\{y_n\}$ فان $\{z_n\}$ متتابعة جزئية من $\{x_n\}$.

تعريف(4)

لتكن$\{x_n\}$متتابعة في المجموعة المرتبة جزئيا X .يقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متزايدة **(Increasing)** أذا كان $x_n \le x_{n+1}$ لكل قيم n .ويقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متناقصة **(Decreasing)** أذا كان $x_{n+1} \le x_n$ لكل قيم n وتسمى المتتابعة رتبيه **(Monotone)** أذا كانت متزايدة آو متناقصة .

يستخدم الرمز $x_n \uparrow$ أذا كانت المتتابعة$\{x_n\}$ متزايدة والرمز $x_n \uparrow x$ أذا كانت المتتابعة$\{x_n\}$ متزايدة وان $x = \sup_{n\in N} x_n$ وكذلك يستخدم الرمز $x_n \downarrow$ أذا كانت المتتابعة $\{x_n\}$ متناقصة والرمز $x_n \downarrow x$ أذا كانت المتتابعة $\{x_n\}$ متناقصة وان $x = \inf_{n\in N} x_n$.

تعريف (5)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة في المجموعة المرتبة جزئيا X .يقال عن المتتابعة بأنها $\{x_n\}$ متقاربة **(Converges)** إلى $x \in X$ أذا وجدت المتتابعتين $\{a_n\},\{b_n\}$ في X بحيث أن

(1) $a_n \le x_n \le b_n$ لكل قيم n

(2) $b_n \downarrow x, \quad a_n \uparrow x$

وان x تسمى نقطة التقارب ويكتب $\lim x_n = x$ (0) أو $x_n \xrightarrow{0} x$

تعريف(6)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة في المجموعة المرتبة جزئيا X .الغاية السفلى **(Inferior limit)** للمتتابعة $\{x_n\}$ يرمز لها بالرمز $\underline{\lim}\, x_n$ آو الرمز $\liminf x_n$ وتعرف بالشكل

$$\underline{\lim}\, x_n = \liminf x_n = \sup_{n\in N} \inf_{j\ge n} x_j$$

يشترط أن الطرف الأيمن موجود .وكذلك الغاية العليا **(Superior limit)** للمتتابعة $\{x_n\}$ يرمز لها بالرمز $\overline{\lim}\, x_n$ أو الرمز $\limsup x_n$ وتعرف بالشكل

$$\overline{\lim}\, x_n = \limsup x_n = \inf_{n\in N} \sup_{j\geq n} x_j$$

بشرط أن الطرف الأيمن موجود. إذا كانت كل من $\overline{\lim} x_n, \underline{\lim}\, x_n$ موجود وان $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x$ فان $x_n \xrightarrow{0} x$.

ملاحـظة

أذا كانت $A=\{x\in X : \exists\{x_{i_n}\}\subseteq\{x_n\} \ni x_{i_n}\to x\}$ **، أي أن** A تمثل مجموعة نقاط تقارب جميع المتتابعات الجزئية من المتتابعة$\{x_n\}$، فان $\underline{\lim}\,\underline{\lim}\, x_n = \inf A$ و $\overline{\lim}\, x_n = \sup A$

المتتابعات الحقيقية Real Sequences

سبق وان عرفنا المتتابعة $\{x_n\}$ في ألمجموعه X على أنها داله من مجموعة الإعداد الطبيعية N إلى المجموعة X .ويقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متتابعة حقيقية إذا كانت $X = R$.

تعريف (7)

المتوالية العددية (Arithmetic Progression) هي المتتابعة التي يكون ناتج طرح كل حد فيها من الحد الذي سبقه مباشرة يساوي عدداً ثابتاً يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز d . وبالتالي فأنه يكفي تعيين متوالية عددية من معرفة حدها الأول وأساسها وذلك بإضافة الأساس على الحد الأول نحصل على الحد الثاني وبإضافة الأساس على الحد الثاني نحصل على الحد الثالث وهكذا ...

مثلاً :

المتوالية العددية التي حدها الأول a وأساسها d هي :

$$\{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(n-1)d, \cdots\}$$

الحد العام (الحد النوني) للمتوالية العددية $\{x_n\}$ هو

$$x_n = a+(n-1)d$$

حيث a يمثل الحد الأول ، r يمثل الأساس ، وأن المجموع الجزئي النوني هو

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (a+(k-1)d) = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

تعريف (8)

المتوالية الهندسية (Geometric Progression) هي المتتابعة التي يكون خارج قسمة كل حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عدداً ثابتاً يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز r .
وبالتالي فأنه يكفي لتعيين المتوالية الهندسية معرفة حدها الأول وأساسها وذلك بضرب الحد الأول في الأساس ينتج الحد الثاني وبضرب الحد الثاني في الأساس ينتج الحد الثالث وهكذا ...

مثلاً :

المتوالية الهندسية التي حدها الأول a وأساسها r هي :

$$\{r, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, \cdots\}$$

الحد العام (الحد النوني) للمتوالية الهندسية $\{x_n\}$ هو

$$x_n = ar^{n-1}$$

حيث a يمثل الحد الأول ، r يمثل الأساس . وأن المجموع الجزئي النوني هو

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

أما إذا كان $r = 1$ فأن $S_n = a + a + \cdots + a = na$. وفي حالة $|r| < 1$ فأن

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad .$$

والمتوالية العددية الهندسية (Arithmetic-Geometric Progression) هي

$$\{a, (a+d)r, (a+2d)r^2, \cdots, (a+(n-1)d)r^{n-1}, \cdots\}$$

والحد العام (الحد النوني) لها هو

$$x_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (a+(k-1)d)r^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + \frac{r\,d(1-nr^{n-1}+(n-1)r^n}{(1-r)^2} \quad , \quad r \neq 1$$

وأن المجموع الجزئي النوني هو

أذا كان $|r| < 1$ فأن $\sum_{n=1}^{\infty} (a+(n-1)d)r^{n-1} = \frac{a}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2}$.

تعريف (9)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية. يقال عن $\{x_n\}$ بأنها

(1) متقاربة (Convergent) إذا وجد $x \in R$ يحقق الشرط الأتي

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن $|x_n - x| < \varepsilon$ لكل $n > k$

ويقال عن ألنقطه x بأنها نقطة تقارب (limit point) للمتتابعة $\{x_n\}$ وتكتب بالشكل

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{أو} \quad x_n \to x \quad \text{عندما} \quad n \to \infty$$

وعليه

$$x_n \to x \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad |x_n - x| \to 0$$

نقطة التقارب للمتتابعة الجزئية $\{x_{n_k}\}$ من المتتابعة $\{x_n\}$ تسمى نقطة تقارب تتابعي جزئيه **(Sub sequential limit point)** للمتتابعة $\{x_n\}$ ويمكن صياغة التعريف هندسيا كالأتي :

المتتابعة $\{x_n\}$ تكون متقاربة إذا وجد $x \in R$. بحيث إن كل فتره مفتوحة $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ مركزها x تحتوي على معظم حدود المتتابعة.

(2) متباعدة **(Divergent)** إذا لم تكن متقاربة

(3) متتابعة كوشي **(Cauchy sequence)** (أو المتتابعة الأساسية) إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $|x_n - x_m| < \varepsilon$ لكل $n, m > k$ وعليه

$\{x_n\}$ متتابعة كوشي إذا وفقط إذا كان $|x_n - x_m| \to 0$ عندما $n, m \to \infty$.

مثال (10)

(1) المتتابعة $\{x\}$ متقاربة إلى x : لأنه لكل $\varepsilon > 0$ فان $|x - x| = 0 < \varepsilon$

(2) المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}$ متقاربة ونقطة تقاربها الصفر : لأنه لكل $\varepsilon > 0$ (حسب خاصية ارخميدس) يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $\frac{1}{k} < \varepsilon$

وعلية لكل $n > k \Leftarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{k} \Leftarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ وبذلك

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad n > k$$

(3) المتتابعة $\{n\}$ (أي أن $x_n = n$ لكل $n \in Z^+$) متباعدة : لأنه لو فرضنا تلك المتتابعة متقاربة $\Leftarrow$ يوجد $x \in R$ بحيث أن $x_n \to x$ وعليه لكل $\varepsilon > 0$ فان الفترة المفتوحة $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ تحتوي على معظم حدود المتتابعة

بما أن $x + \varepsilon \in R \Leftarrow$ يوجد (حسب خاصية ارخميدس) $k \in Z^+$ بحيث أن $x + \varepsilon < k$

وبما أن $x + \varepsilon < k < k+1 < \cdots \Leftarrow k, k+1, k+2 \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

أي أن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ لاتحتوي على معظم حدود المتتابعة. وهذا تناقض.

(4) المتتابعة $\{x_n\}$ بحيث أن

$$x_n = \begin{cases} n, & n \le 10^6 \\ 1, & n > 10^8 \end{cases}$$

متقاربة وتقترب إلى الواحد : لأنه لكل $\varepsilon > 0$ ، نأخذ $k > 10^6$
لكل $n > k \Leftarrow x_n = 1$ وعلية $|x_n - 1| = 0 < \varepsilon$ وبذلك $x_n \to 1$.

(5) المتتابعة $\{(-1)^n\}$ متباعدة : لأنه لو فرضنا تلك المتتابعة
متقاربة $\Leftarrow$ يوجد $x \in R$ بحيث أن $x_n = (-1)^n \to x$
ليكن $\varepsilon > 0$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن $|x_n - x| < \varepsilon$ لكل $n > k$
$\Leftarrow |(-1)^n - x| < \varepsilon$ لكل $n > k \Leftarrow x - \varepsilon < (-1)^n < x + \varepsilon$ لكل $n > k$
$\Leftarrow (-1)^n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ لكل $n > k$
لو فرضنا $x = 1$. نأخذ $\varepsilon = \frac{1}{4} \Leftarrow \varepsilon > 0$. $\Leftarrow (-1)^n \in (1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}\varepsilon)$ لكل n عدد
زوجي بينما $(-1)^n \notin (1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}\varepsilon)$ لكل n عدد فردي ، وهذا يعني أن الفترة
$(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}\varepsilon)$ لاتحتوي على معظم حدود المتتابعة وعلية المتتابعة لايمكن أن تقترب إلى 1
وبالمثل نبرهن على لاتقترب إلى -1 .
الآن : نفرض $x \ne 1$ وكذلك $x \ne -1$
ليكن $a_1 = |1 - x|$ و $a_2 = |-1 - x|$. نأخذ ε بحيث $\varepsilon < a_1$ و $\varepsilon < a_2$
نستنتج أن الفترة المفتوحة $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ لاتحتوي على أي حد من حدود المتتابعة $\{(-1)^n\}$
وعلية فان المتتابعة لايمكن أن تقترب إلى x .

مبرهنة (11)

(1) إذا كانت المتتابعة الحقيقية متقاربة فان نقطة تقاربها وحيده
(2) كل متتابعة متقاربة تكون متتابعة كوشي
(3) $x_n \to x$ إذا وفقط إذا كانت كل متتابعة جزئيه من $\{x_n\}$ تكون متقاربة إلى x .

البرهان :

(1)
نفرض $x_n \to x$, $x_n \to y$ بحيث أن $x \ne y$
وليكن $|x - y| = \varepsilon \Leftarrow \varepsilon > 0$
بما أن $x_n \to x \Leftarrow$ يوجد $k_1 \in Z^+$ بحيث $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > k_1$

وكذلك $x_n \to y$ يوجد $k_2 \in Z^+$ بحيث $|x_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > k_2$

نضع $k = \max\{k_1, k_2\}$ ، فيكون

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ و } |x_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ لكل } n > k$$

$$\varepsilon = |x - y| = |(x_n - x) + (x_n - y)| \le |x_n - x| + |x_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا تناقض وعليه فأن $x = y$.

(2)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة متقاربة $\Leftarrow$ يوجد $x \in X$ بحيث أن $x_n \to x$

ليكن $\varepsilon > 0$

بما أن $x_n \to x$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > k$$

إذا كان $n, m \ge k$ ، فأن

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \le |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وعليه فأن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي.

تعريف (12)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية. يقال عن $\{x_n\}$ بأنها

(1) مقيده من الأعلى (bounded above) إذا وجد عدد حقيقي M_1 بحيث إن $x_n \le M_1$ لكل قيم n .

(2) مقيده من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي M_2 بحيث إن $M_2 \le x_n$ لكل قيم n .

(3) مقيده (Bounded) إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|x_n| \le M$ لكل قيم n .

مثال (13)

(1) المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}$ مقيدة : لأنة $\left|\frac{1}{2}\right| < 2$ لكل قيم n .

(2) المتتابعة $\{\frac{n}{n+1}\}$ مقيدة : لأنة $\frac{n}{n+1} < 1$ لكل قيم n .

(3) المتتابعة $\{(-1)^n\}$ مقيدة : لأنة $\left|(-1)^n\right| \le 1$ لكل قيم n .

(4) المتتابعة $\{n\}$ غير مقيدة : لأنة لو فرضنا هذه المتتابعة مقيدة $\Leftarrow$ يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|n| \le M$ لكل قيم n . وهذا يناقض خاصية ارخميدس.لأنه يوجد $n \in Z^+$ بحيث أن $n > M$.

(5) المتتابعة $\{3^n\}$ غير مقيدة :

مبرهنة (14)

كل متتابعة كوشي تكون مقيده وعليه كل متتابعة متقاربة تكون مقيده

البرهان:

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي : يجب أن نبرهن : المتتابعة $\{x_n\}$ مقيدة

ليكن $\varepsilon = 1$

بما أن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي $\Leftarrow$ يوجد $k \in z^+$ بحيث أن

$$|x_n - x_m| < 1 \qquad \forall n, m > k$$

ليكن $m = k+1 \quad \Leftarrow \quad \|x_n - x_{n+1}\| < 1 \quad \forall\, n > k$

بما أن $|x_n| - |x_{k+1}| \le |x_n - x_{k+1}| \quad \Leftarrow$

$$|x_n| - |x_{k+1}| < 1 \quad \forall\, n > k$$

$$|x_n| < 1 + |x_{k+1}| \quad \forall\, n > k$$

نضع $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_k|, |x_{k+1}| + 1\} \quad \Leftarrow \quad |x_n| \le M \quad \forall n \in Z^+$

وعلية المتتابعة $\{x_n\}$ مقيدة

ملاحـظة

إذا كانت المتتابعة الحقيقية مقيدة فإنها ليست بالضرورة آن تكون متقاربة والمثال التالي يوضح ذلك :

المتتابعة $\{(-1)^n\}$ مقيدة ولكنها ليست متقاربة

تعريف (15)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية . يقال عن $\{x_n\}$ بأنها

(1) غير متناقصة **(non-decreasing)** إذا كان $x_n \le x_{n+1}$ لكل قيم n .

(2) متزايدة **(increasing)** إذا كان $x_n < x_{n+1}$ لكل قيم n .

(3) غير متزايدة **(non-increasing)** إذا كان $x_{n+1} \le x_n$ لكل قيم n .

(4) متناقصة **((decreasing)** إذا كان $x_{n+1} < x_n$ لكل قيم n .

ويقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها رتيبة **(monotonic)** إذا كانت تحقق أياً من الحالات الأربعة أعلاه .

مثال (16)

(1) المتتابعة $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ متناقصة $\Leftarrow$ رتبيه

(2) المتتابعة $\{\frac{n}{n+1}\}$ متزايدة $\Leftarrow$ رتبيه

(3) المتتابعة $\{(-1)^n\}$ ليست رتبيه

مبرهنة (17)

(1) كل متتابعة حقيقية مقيده ورتيبة تكون متقاربة.
(2) كل متتابعة حقيقية مقيده تحتوي على متتابعة جزئيه متقاربة.

البرهان:

(1)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية مقيدة وغير متناقصة

بما أن $\{x_n\}$ مقيدة $\Leftarrow$ يوجد عدد صحيح موجب M بحيث أن $|x_n| \le M$ لكل قيم n

نضع $A = \{x_n : n \in Z^+\}$ $\Leftarrow$ $A \neq \phi$

بما أن $x_n \le M$ لكل n $\Leftarrow$ M قيد أعلى للمجوعة A $\Leftarrow$ A مجموعة مقيدة من الأعلى.

بما أن $A \subseteq R$ (حسب خاصية الكمال للأعداد الحقيقية) يوجد $x \in R$ بحيث أن $\sup A = x$.

الآن: يجب أن نبرهن على أن : $x_n \to x$

ليكن $\varepsilon > 0$ $\Leftarrow$ $x - \varepsilon < x$

بما أن x اصغر قيد أعلى $\Leftarrow$ $x - \varepsilon$ ليس قيد أعلى للمجوعة A

$\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن $x - \varepsilon < x_k$

بما أن المتتابعة $\{x_n\}$ غير متناقصة $x_n \le x_{n+1}$ لكل قيم n

$\Leftarrow$ $x - \varepsilon < x_k \le x_{k+1}$ $\Leftarrow$ $x - \varepsilon \le x_n$ لكل قيم n

بما أن $x_n \le x$ لان x قيد أعلى للمجوعة A

$\Leftarrow$ $x_n \le x < x + \varepsilon$ $\Leftarrow$ $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ لكل $n > k$

$x_n \to x$ $\Leftarrow$ $n > k$ لكل $|x_n - x| < \varepsilon$

(2)

مبرهنة (18) (بعض المتتابعات الخاصة)

(1) إذا كان $P > 0$ فأن $x_n = \frac{1}{n^P} \to 0$

(2) إذا كان $P > 0$ فأن $x_n = \sqrt[n]{P} \to 1$ $x_n = P^{\frac{1}{n}}$

(3) $x_n = \sqrt[n]{n} \to 1$ $x_n = n^{\frac{1}{n}}$

(4) إذا كانت $|a| < 1$ فأن $x_n = a^n \to 0$

(5) إذا كانت $a = 1$ فأن $x_n = a^n \to 1$ في الواقع $a^n = 1^n = 1$

(6) إذا كانت $\alpha \in R, P > 0$ فأن $x_n = \frac{n^\alpha}{(1+P)^n} \to 0$ -

(7) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \to e$ حيث $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$