البرهان :

(1)

ليكن $\varepsilon > 0$ نأخذ $k > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}$

لكل $n > k \Leftarrow n > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{p}} \Leftarrow \frac{1}{n^p} < \varepsilon \Leftarrow \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon$

(2)

(ا) إذا كان $P > 1 \Leftarrow \sqrt[n]{p} > 1$: نضع $y_n = \sqrt[n]{p} - 1 \Leftarrow y_n > 0$

$$\sqrt[n]{p} = 1 + y_n$$

$$p = (1 + y_n)^n = 1 + ny_n + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 + \cdots + y_n^2$$

بما أن $y_n > 0$ لكل n

$$p \geq 1 + ny_n \Leftarrow \frac{p-1}{n} \geq y_n \Leftarrow 0 < y_n \leq \frac{p-1}{n}$$

$$y_n \to 0 \Leftarrow x_n \to 1$$

(ب) إذا كان $P = 1 \Leftarrow \sqrt[n]{p} = 1$ لكل قيم $n \Leftarrow \sqrt[n]{p} \to 1$

(ج) إذا كان $0 < P < 1 \Leftarrow \frac{1}{p} > 1$: نضع $\lambda = \frac{1}{p} \Leftarrow \sqrt[n]{p} = \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda}}$ لان $\sqrt[n]{\lambda} \to 1,$

$$\lambda > 1 \Leftarrow \sqrt[n]{p} \to 1$$

(3)

ليكن $y_n = \sqrt[n]{n} - 1$

بما أن $\sqrt[n]{n} > 1$ لكل $n \Leftarrow y_n > 0$ لكل قيم n

$$\sqrt[n]{n} = 1 + y_n$$

$$n = (1 + y_n)^n = 1 + ny_n + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 + \cdots + y_n^2$$

$$n > \frac{n(n-2)}{2} y_n^2 \Leftarrow y_n^2 < \frac{2}{n-1} \Leftarrow |y_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Leftarrow y_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$ لكل $n \geq 2$

$$y_n \to 0 \Leftarrow x_n \to 1$$

(4)

يجب أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن $|x_n| < \varepsilon$ لكل $n > k$

(ا) إذا كانت $a = 0$ فمن الممكن أن نأخذ $k = 0$

(ب) إذا كانت $a \neq 0 \Leftarrow \frac{1}{|a|}$ موجود : نضع $b = |a| - 1 \Leftarrow \frac{1}{|a|} = 1 + b$

بما أن $|a|<1 \Leftarrow \frac{1}{|a|}>1 \Leftarrow b>0$

$$|a^n| = |a|^n = \frac{1}{(1+b)^n}$$

$$|a^n| < \frac{1}{nb} \text{ لكل قيم } n \Leftarrow \frac{1}{(1+b)^n} < \frac{1}{nb} \Leftarrow (1+b)^n = 1+nb+\cdots+b^n > nb$$

$$\text{نضع } k > \frac{1}{\varepsilon b} \text{ : لكل } n > k \Leftarrow n > \frac{1}{\varepsilon b} \Leftarrow \frac{1}{nb} < \varepsilon \Leftarrow |a^n| < \varepsilon$$

$$x_n = a^n \to 0 \Leftarrow$$

(6)

(7)

مبرهنة (19)

ليكن كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ متتابعة حقيقية بحيث إن $x_n \to x$, $y_n \to y$ فأن

(1) $x_n + y_n \to x + y$

(2) $\lambda x_n \to \lambda x$ لكل $\lambda \in R$

(3) $\lambda + x_n \to \lambda + x$ لكل $\lambda \in R$

(4) $x_n y_n \to xy$

(5) $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ عندما $y_n \neq 0$ لكل قيم n .

(6) $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$ عندما $y_n \neq 0$ لكل قيم n .

(7) $|x_n| \to |x|$

(8) $|x_n - y_n| \to |x - y|$

(9) إذا كان $x_n \leq y_n$ لكل قيم n فان $x \leq y$.

البرهان :

(1)

ليكن $\varepsilon > 0$

بما أن $x_n \to x \Leftarrow$ يوجد $k_1 \in Z^+$ بحيث $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > k_1$

وكذلك $y_n \to y$ يوجد $k_2 \in Z^+$ بحيث $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > k_2$

نضع $k=\max\{k_1,k_2\}$ ، فيكون

$$|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ و } |y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ لكل } n>k$$

$$|(x_n-x)+(x_n-y)|\le|x_n-x|+|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

وعلية $x_n+y_n\to x+y$

(2)

بما أن $x_n\to x \Leftarrow$ يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ لكل $n>k$

$$|\lambda x_n-\lambda x|=|\lambda(x_n-x)|=|\lambda||x_n-x|<|\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|}=\varepsilon$$

وعلية $\lambda x_n\to\lambda x$.

(4)

بما أن كل متتابعة متقاربة تكون مقيدة

$\Leftarrow$ كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ مقيدة $\Leftarrow$ يوجد $M_1>0$ و $M_2>0$ بحيث أن

$|x_n|\le M_1$ لكل $n>k$ و $|y_n|\le M_2$ لكل $n>k$ وان $|x|\le M_1$ و $|y|\le M_2$

نضع $M=\max\{M_1,M_2\}$ ، فيكون

$|x_n|\le M$ لكل $n>k$ و $|y_n|\le M$ لكل $n>k$ وان $|x|\le M$ و $|y|\le M$

بما أن $x_n\to x \Leftarrow$ يوجد $k_1\in Z^+$ بحيث $|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2M}$ لكل $n>k_1$

وكذلك $y_n\to y$ يوجد $k_2\in Z^+$ بحيث $|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2M}$ لكل $n>k_2$

نضع $k=\max\{k_1,k_2\}$ ، فيكون

$$|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2M} \text{ و } |y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2M} \text{ لكل } n>k$$

$$x_ny_n-xy=(x_ny_n-x_ny)+(x_ny-xy)=x_n(y_n-y)+(x_n-x)y$$

$$|x_ny_n-xy|=|x_n(y_n-y)+(x_n-x)y|\le|x_n||y_n-y|+|x_n-x||y|<M.\frac{\varepsilon}{2M}+M.\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

وعلية $x_ny_n\to xy$

(5)

بما أن $y\ne0 \Leftarrow |y|>0 \Leftarrow \frac{1}{2}|y|>0$

بما أن $y_n\to y \Leftarrow$ يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $|y_n-y|<\frac{1}{2}|y|$ لكل $n>k$

بما أن $y=(y-y_n)+y_n \Leftarrow |y|=|y-y_n|+|y_n| \Leftarrow |y|-|x|\le|y-y_n|$

$|y|-|y_n|<\frac{1}{2}|y|$ لكل $n>k$ $\Leftarrow$ $-|y_n|<-\frac{1}{2}|y|$ لكل $n>k$ $\Leftarrow$ $|y_n|>\frac{1}{2}|y|$ لكل $n>k$

نضع $d=\min\{|y_1|,|y_2|,\cdots,|y_k|,\frac{1}{2}|y|\}$ $\Leftarrow$ $|y_n|\geq d$ لكل $n>k$ وان $|y|\geq d$

بما أن $\{x_n\}$ متقاربة $\Leftarrow$ $\{x_n\}$ مقيدة $\Leftarrow$ يوجد $M>0$ بحيث أن $|x_n|\leq M$ لكل $n>k$ وان $|x|\leq M$

بما أن $x_n\to x$ $\Leftarrow$ يوجد $k_1\in Z^+$ بحيث $|x_n-x|<\frac{\varepsilon d}{2}$ لكل $n>k_1$

وكذلك $y_n\to y$ يوجد $k_2\in Z^+$ بحيث $|y_n-y|<\frac{\varepsilon d^2}{2M}$ لكل $n>k_2$

نضع $k=\max\{k_1,k_2\}$ ، فيكون

$|x_n-x|<\frac{\varepsilon d}{2}$ و $|y_n-y|<\frac{\varepsilon d^2}{2M}$ لكل $n>k$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right|=\left|\frac{yx_n-xy_n}{yy_n}\right|=\frac{|yx_n-xy_n|}{|yy_n|}=\frac{|yx_n-x_ny_n+x_ny_n-xy_n|}{|y||y_n|}=\frac{|x_n(y-y_n)+y_n(x_n-x)|}{|y||y_n|}$$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right|\leq\frac{1}{|y||y_n|}(|x_n||y-y_n|+|y_n||x_n-x|)=\frac{|x_n||y-y_n|}{|y||y_n|}+\frac{|x_n-x|}{|y|}<\frac{M\varepsilon\frac{d^2}{2M}}{d^2}+\frac{\frac{\varepsilon d}{2}}{d}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\frac{x_n}{y_n}\to\frac{x}{y}$

(6)

مباشرة من (5) بوضع $x_n=1$ لكل قيم n نحصل على $\frac{1}{y_n}\to\frac{1}{y}$

(7)

ليكن $\varepsilon>0$

بما أن $x_n\to x$ يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $|x_n-x|<\varepsilon$ لكل $n>k$

بما أن $||x_n|-|x||\leq|x_n-x|$ $\Leftarrow$ $||x_n|-|x||<\varepsilon$ لكل $n>k$ وعلية $|x_n|\to|x|$

والمثال التالي : يوضح أن $|x_n|\to|x|$ ولكن $|x_n|\to|x|$

لو فرضنا $x_n=(-1)^n$. نلاحظ أن المتتابعة $\{|x_n|\}$ متقاربة ولكن $\{x_n\}$ غير متقاربة.

مبرهنة (15)

(1) لكل عدد حقيقي تـوجد متتابعة كوشي من الأعداد النسبية تقترب إليه .

(2) لكل عدد حقيقي تـوجد متتابعة كوشي من الأعداد غير النسبية تقترب إليه .

(3) توجد متتابعة كوشي من الأعداد النسبية لا تقترب إلى أي عدد نسبي .

ليكن كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ متتابعة حقيقية بحيث أن $y_n \to 0$. أذا وجد عدد صحيح موجب k بحيث إن $0 \le x_n \le y_n$ لكل $n > k$ فأن $x_n \to 0$.

البرهان :

(1)

ليكن $r \in R$

بما أن $r - \frac{1}{n} < r < r + \frac{1}{n}$ لكل $n \in Z^+$ وعلية (حسب كثافة الأعداد النسبية) لكل $n \in Z^+$ يوجد $r_n \in Q$ بحيث أن $r - \frac{1}{n} < r_n < r + \frac{1}{n}$ وبذلك نحصل على المتتابعة $\{r_n\}$ في Q

بحيث أن $r - \frac{1}{n} < r_n < r + \frac{1}{n}$ لكل $n \in Z^+ \Rightarrow |r_n - r| < \frac{1}{n}$ لكل $n \in Z^+$

الآن: يجب أن نبرهن على أن : $r_n \to r$

ليكن $\varepsilon > 0$ (حسب خاصية ارخميدس) يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن $\frac{1}{k} < \varepsilon$

لكل $n > k \Leftarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{k} \Leftarrow |r_n - r| < \frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \varepsilon \Leftarrow r_n \to r$

(2)

نستخدم نفس الأسلوب (1) باستبدال العدد النسبي بغير نسبي .

(3)

ليكن $r = \sqrt{2} \Leftarrow r \in R$.

باستخدام (1) توجد متتابعة كوشي من الأعداد النسبية $\{r_n\}$تقترب إلى r.

أي أن $r_n \to r$

بما أن التقارب وحيد وان $r \notin Q \Leftarrow \{r_n\}$ لاتقترب إلى عدد نسبي

ملاحـظة

الفقرة (3) في المبرهنة أعلاه تبين وجود متتابعات كوشي في حقل الأعداد النسبية ولكنها غير متقاربة ضمن هذا الحقل (أي نقطة التقارب لاتنتمي للحقل)

تعريف (16)

يقال عن فضاء X بأنه كامل أو غير ناقص (Complete) إذا كانت كل متتابعة كوشي في X تكون متقاربة في X .

وهذا يعني أن فضاء الأعداد النسبية فضاء ناقص (غير كامل) بينما سنرى فيما بعد أن فضاء الأعداد الحقيقية فضاء كامل.

تعريف (17)

ليكن $a_n, b_n \in R$ **بحيث أن** $a_n \le b_n$ **لكل** $n \in Z^+$ **ولتكن** $I_n = [a_n, b_n]$ **.** يقال عن المتتابعة $\{I_n\}$ المكونة من الفترات المغلقة بأنها متتابعة معشعشه **(nested sequence)** إذا كان $I_{n+1} \subset I_n$ لكل قيم n أي إن $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ لكل قيم n .

العدد غير السالب $b_n - a_n$ يسمى طول الفترة I_n ويرمز له بالرمز $|I_n|$ أي إن $|I_n| = b_n - a_n$.

مبرهنة(18)

لتكن $\{I_n\}$ متتابعة معشعشه فان

(1) $\bigcap_n I_n \neq \phi$

(2) إذا كانت $|I_n| \to 0$ فان $\bigcap_n I_n$ يحتوي على نقطه واحده فقط .

البرهان :

(1)

لتكن $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ و $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$

بما أن $I_{n+1} \subset I_n$ لكل قيم n وعلية إذا كان $n \le m$ فان $I_m \subset I_n \Leftarrow [a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$

$\Leftarrow a_n \le a_m$ و $b_m \le b_n$

بما أن $a_n < b_n$ و $a_m < b_m \Leftarrow a_m < b_m < b_n$ لكل $n, m \in Z^+$

$\Leftarrow b_n$ قيد أعلى للمجموعة A (أي أن كل عنصر في B هو قيد أعلى للمجموعة A)

بما أن $A \neq \phi$ وان $A \subseteq R$ (حسب كمالية الأعداد الحقيقية)، يوجد $y \in R$ بحيث أن $\sup A = y$

$\Leftarrow a_n \le y$ لكل $n \in Z^+$

بما أن b_n قيد أعلى للمجموعة A و y اصغر قيد أعلى للمجموعة A

$\Leftarrow a_n \le y \le b_n$ لكل $n \in Z^+ \Leftarrow y \in [a_n, b_n]$ لكل $n \in Z^+$

$\Leftarrow y \in \bigcap_n I_n$ لكل $n \in Z^+ \Leftarrow \bigcap_n I_n \neq \phi$

(2)

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض يوجد $x, y \in \bigcap_n I_n$ بحيث أن $x \neq y$

$\Leftarrow x, y \in I_n$ لكل $n \in Z^+$

نضع $\varepsilon = |x - y| \Leftarrow \varepsilon > 0$

بما أن $|I_n| \to 0 \Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن

$\Leftarrow ||I_n| - 0| < \varepsilon \Leftarrow n > k$ لكل $|I_n| < \varepsilon \Leftarrow n > k$ لكل

ليكن $m > k \Leftarrow |I_m| < \varepsilon$

بما أن $x, y \in I_m \Leftarrow |x - y| \le |I_m| < \varepsilon$ وهذا تناقض $\Leftarrow x = y \Leftarrow \bigcap_n I_n = \{y\}$

ملاحـظات

(1) إذا كانت الفترات I_n غير مغلقة فان المبرهنة السابقة غبر صحيحة والمثال التالي يوضح ذلك

لتكن $I_n = (0,\frac{1}{n})$ لكل $n \in Z^+$

$I_1 = (0,1), \quad I_2 = (0,\frac{1}{2}), \cdots$

نلاحظ أن $I_{n+1} \subset I_n$ لكل $n \in Z^+$ ولكن $\bigcap_n I_n = \phi$

(2) لكل $n \in Z^+$ ، نضع $I_n = \{x \in Q : \sqrt{2} - \frac{1}{n} < x < \sqrt{2} + \frac{1}{n}\}$ فان $\bigcap_n I_n = \sqrt{2}$ وهذا يبين أن التقاطع لايحتوي على عدد نسبي.

المبرهنة التالية تبين أن فضاء الأعداد الحقيقية هو فضاء كامل .

مبرهنة(19)

كل متتابعة كوشي الحقيقية تكون متقاربة ، وعليه تكون المتتابعة الحقيقية $\{x_n\}$ متقاربة أذا وفقط إذا كانت $\{x_n\}$ كوشي .

البرهان :

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في R

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{x_n\}$ مقيدة ، يوجد $M > 0$ بحيث أن $|x_n| \le M$ لكل $n \in Z^+$

$\Leftarrow$ $-M \le x_n \le M$ لكل $n \in Z^+$

نضع $I_1 = [-M, M]$. نلاحظ أن الفترة المغلقة I_1 تحتوي على جميع حدود المتتابعة وان $|I_1| = M - (-M) = 2M$

نقسم الفترة I_1 إلى فترتين مغلقتين I_2, I_2' متساويتين في الطول ، أي أن $|I_2| = \frac{1}{2}|I_1| = \frac{2M}{2}$

إحدى الفقترتين I_2, I_2' تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$ولتكن هذه الفترة I_2.

نقسم الفترة I_2 إلى فترتين مغلقتين I_3, I_3' متساويتين في الطول ، أي أن $|I_3| = \frac{1}{2}|I_2| = \frac{2M}{2^2}$

بما أن I_2 تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$

إحدى الفقترتين I_3, I_3' تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$ولتكن هذه الفترة I_3.

باستخدام الاستقراء الرياضي ، نحصل على المتتابعة من الفترات المغلقة $\{I_n\}$ بحيث أن كل من I_n تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$

$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ لكل $n \in Z^+$ و $|I_n| = \frac{2M}{2^{n-1}}$

$\Leftarrow |I_n| \to 0$ باستخدام مبرهنة الفترات المعشعشه نحصل على $\bigcap_n I_n$ يحتوي على نقطه واحده فقط . ولتكن x ، أي أن $\bigcap_n I_n = \{x\}$

الآن يجب أن نبرهن : $x_n \to x$

ليكن $\varepsilon > 0$

بما أن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي $\Leftarrow$ يوجد $k_1 \in Z^+$ بحيث أن $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n.m > k_1$

بما أن $|I_n| \to 0 \Leftarrow$ يوجد $k_2 \in Z^+$ بحيث أن $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > k_2$

نضع $k = \max\{k_1, k_2\}$

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ و } |I_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ لكل } n.m > k$$

لكل $n. > k$ يجب أن نبرهن : $|x_n - x| < \varepsilon$

بما أن I_n تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$ وعلية $m \in Z^+$ بحيث أن $m > k$ وان $x_m \in I_n$

بما أن $\bigcap_n I_n = \{x\} \Leftarrow x \in I_n \Leftarrow |x_n - x| \le |I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|I_n - x| \le |x_n - x_m| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وعلية $|x_n - x| < \varepsilon$ لكل $n. > k \Leftarrow x_n \to x$.

تعريف (20)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية . يقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متقاربة إلى ∞ إذا كان لكل عدد حقيقي موجب M يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن $x_n \ge M$ لكل $n \ge k$. ويكتب

$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ أو $x_n \to \infty$.

ويقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متقاربة إلى $-\infty$ أذا كان لكل عدد حقيقي موجب M يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $x_n < M$ لكل $n > k$ ويكتب

$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ أو $x_n \to -\infty$.

تعريف (21)

لتكن$\{x_n\}$ متتابعة حقيقية ولتكن ألمجموعةA تحتوي على جميع نقاط التقارب ألتتابعي الجزئي للمتتابعة $\{x_n\}$,أي إن $x \in A$ إذا وفقط إذا وجدت متتابعة جزئيه $\{x_{n_K}\}$من$\{x_n\}$ بحيث أن $x_{n_K} \to x$ اصغر قيد أعلى للمجموعة A(sup A) يسمى بالغاية العليا **Upper limit or superior limit** ويرمز لها الرمز $\overline{\lim} x_n$ أو الرمز $\lim_n \sup x_n$ ، أي أن

$\overline{\lim} x_n = \lim_n \sup x_n = \sup A$

واكبر قيد أسفل للمجموعة A (inf A) يسمى بالغاية الدنيا **Lower limit or interior limit** ويرمز لها بالرمز $\underline{\lim} x_n$ أو الرمز $\lim_n \inf x_n$ أي إن

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_n \inf x_n = \inf A$$

من الواضح إن A مجموعه مغلقه في R وان

(1) $\sup A \in A$

(2) إذا كان $\sup A < x$ فأنه يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن $x_n < x$ لكل $n > k$ وبالمثل نحصل نتيجة بالنسبة $\inf A$.

مبرهنة (22)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية

(1) $\overline{\lim} x_n = \lim_n \sup x_n = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k$.

(2) $\underline{\lim}\, x_n = \lim_n \inf x_n = \sup_n \inf_{k \geq n} x_k$.

(3) $\overline{\lim} x_n = x$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطين الآتيين:

(أ) لكل $\varepsilon > 0$ يوجد k بحيث أن $x_n < x + \varepsilon$ لكل $n \geq k$.

(ب) لكل $\varepsilon > 0$ ولكل n يوجد $m \geq n$ بحيث إن $x_m > x - \varepsilon$.

مبرهنة (23)

لتكن كل من $\{x_n\}, \{y_n\}$ متتابعة حقيقية

(1) $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$

(2) $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

(3) $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = x$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

(4) إذا كان $x_n < y_n$ لكل $n \geq k$ بحيث k ثابت فأن

(أ) $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$

(ب) $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$

(5) $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$

(6) بشرط لا يوجد مجموع بالصيغة $\infty - \infty$

(أ) $\overline{\lim} x_n$ اكبر نقطه ملاصقه للمتابعة $\{x_n\}$

(ب) $\underline{\lim} x_n$ اصغر نقطه ملاصقه للمتابعة $\{x_n\}$

متتابعات الدوال Sequences of Functions

لتكن $F(\Omega)$ مجموعة جميع الدوال الحقيقية (ذات القيم الحقيقية) المعرفة على ألمجموعه Ω ,أي أن

$$F(\Omega) = \{ f : \Omega \to R, \quad \text{دالة } f \}$$

ولتكن $\{f_n\}$متتابعة في $F(\Omega)$. لكل $x \in \Omega$ تحصل على متتابعة عدديه $\{f_n(x)\}$.

لو فرضنا المتتابعة العددية $\{f_n(x)\}$ متقاربة لجميع نقاط Ω . فيمكننا تعريف داله $f : \Omega \to R$ بالصيغة الآتية

لكل $x \in X$ فأن $f(x)$ نقطة تقارب للمتتابعة العددية $\{f_n(x)\}$ أي إن

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{أو} \quad f_n(x) \to f(x) \quad .$$

من تعريف التقارب للمتتابعات العددية نحصل على لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad n > k \quad .$$

لاحظ إن k بصوره عامه ، تعتمد على كل من x, ε .

مما تقدم يمكن أن يصاغ في التعريف الأتي :

تعريف (24)

لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على ألمجموعه Ω ولتكن f داله ذات قيم حقيقية معرفه على Ω . يقال عن المتتابعة $\{f_n\}$ بأنها متقاربة نقطيا **(Converge point wise)** إلى الدالة f إذا كانت المتتابعة $\{f_n(x)\}$ تقترب إلى العدد $f(x)$ لكل $x \in \Omega$. بعبارة أخرى إذا كان لكل $x \in \Omega$ ولكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad n > k \quad .$$

ويكتب $f_n \xrightarrow{u} f$.

ويقال عن المتتابعة $\{f_n\}$ بأنها تقترب بانتظام **(Converge uniformly)** إلى الدالة f إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{لكل } n > k \text{ ولكل } x \in X \quad .$$

ويكتب $f_n \xrightarrow{u} f$.

مبرهنة (25)

أذا كانت $f_n \xrightarrow{u} f$ فأن $f_n \to f$ والعكس غير صحيح دائما .

مثال (26)

المتتابعة $\{x^n\}$ متقاربة بانتظام إلى **0** على $X = [0,a]$, $0 < a < 1$ وغير متقاربة على $[0,1]$.

الحل :

ليكن $\varepsilon > 0$ وليكن $k > \frac{\log \varepsilon}{\log a}$ $\quad 0 < a < 1$

ليكن $n > k$ وليكن $x \in [0, a]$

$$|x^n - 0| < a^n < a^k < a^{\frac{\log_\varepsilon}{\log_a}} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\{x^n\}$ متقاربة بانتظام إلى 0 على $[0, a]$ بحيث أن $0 < a < 1$

الآن : في $(0,1)$

ليكن $\varepsilon = \frac{1}{4}$ يوجد $k \in N$

$$|x^n - 0| < \frac{1}{4} \quad \forall n > k \quad \wedge \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{4} \quad \forall \quad n > h \quad tahinis \quad x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0,1] \quad \Leftarrow$$

$$e^{-1} < \frac{1}{4} \quad \Leftarrow$$

$\Leftarrow$ $\{x^n\}$ ليس متقاربة بانتظام على $[0,1]$ ، أما إذا كانت $x = 1$ $\Leftarrow$ $x^n = 1$.

مثال(27)

المتتابعة $\left\{\frac{n\,x}{1+n^2 x}\right\}$ متقاربة نقطيا وليس متقاربة بانتظام على R .

$$|\, f_n(x) - 0| = \left|\frac{n\,x}{1+n^2 x}\right| \le \left|\frac{n\,x}{n^2 x^2}\right| = \frac{1}{|n\,x|} < \frac{1}{n\,k} < \varepsilon \quad \forall \quad n \ge \frac{1}{k\varepsilon}$$

نستنتج ان المتتابعة متقاربة إلى 0 لكل $x \in R$. ♦

تعريف (28)

لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على ألمجموعه Ω. يقال عن $\{f_n\}$ بأنها متتابعة كوشي النقطية **(point wise Cauchy sequence)** إذا كان لكل $x \in \Omega$ ولكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad \text{لكل} \qquad n, m > k$$

ويقال عن $\{f_n\}$ بأنها متتابعة كوشي المنتظم **(Uniformly Cauchy sequence)** إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad \text{لكل} \quad n, m > k \quad \text{ولكل} \quad x \in \Omega \ .$$

المصادر

[1] عادل غسان نعوم،"**مقدمة في التحليل الرياضي**"، جامعة بغداد – العراق 1986.
[2] **Apostol,** " Mathematical Analysis"**,2 nd, 1974**
[3] **Ash, R. B.,** " Real Analysis And Probability"**, 1972.**
[4] **Billingsley, P.,** " Probability And Measure " **, 1979-1986.**
[5] **Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.,**" Real Variables" **, 1969.**
[6] **Edwin Hewitt Karl Stromberg,** " Real And Abstract Analysis" **, 1978**
[7] **Folland . G. B.,**" Real Analysis"**,2 nd, 1999**
[8] **Goldberg, R. R.,**" Methods Of Real Analysis"**,1979.**
[9] **Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.,**" Introductory Real Analysis",**1970.**
[10] **Royden, H. L.,**" Real Analysis",**1988**
[11] **Rudin, W.,** " Principles Of Mathematical Analysis",**1953**
[12] **Rudin, W.,** " Real And Complex Analysis",**19**
[13] **Ruel V. Churchill James W. Brown Roger F. Verhey,**" Complex Variables And Applications",**3 rd, 1974.**
[14] **Scott, D. B., And Tims, S. R.,**" Mathematical Analysis An Introduction",**1966.**
[15] **Sharma, J. N And Vasishtha, A. R.,**" Real Analysis",**5 th, 1977.**
[16] **Walter Rudin,**" Principles Of Mathematical Analysis",**2 nd, 1964.**
[17] **Walter Rudin,**" Real And Complex Analysis",**2 nd, 1974.**
[18] **Walter Rudin,**" Principles Of Mathematical Analysis",**3 rd, 1986.**

محاضرات
الأستاذ المساعد الدكتور نوري فرحان المياحي
قسم الرياضيات – كلية علوم الحاسبات والرياضيات – جامعة القادسية – العراق

ر331
التحليل الرياضي (1) Mathematical Analysis I

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

المحاضرة الثالثة

المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

لتكن $\{a_n\}$ متتابعة حقيقية وليكن

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
. . . . . .
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ تسمى متسلسلة لانهائية ويرمز لها عادة بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. يطلق على الإعداد $a_1, a_2, a_3, \cdots$ حدود المتسلسلة غير المنتهية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ويطلق على الإعداد $S_1, S_2, S_3, \cdots$ المجاميع الجزئية **(Partial sums)** للمتسلسلة غير المنتهية .

مما تقدم يمكن صياغة التعريف الأتي:

تعريف (1)

لتكن $\{a_n\}$ متتابعة حقيقية وليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ يطلق على المتتابعة $\{S_n\}$ متسلسلة لانهائية ويرمز لها بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

تعريف (2)

يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنها متقاربة (أو تتقارب إلى القيمة S) أذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة إلى S (أي أذا كان $\lim_{n\to\infty} S_n = S$). ويطلق على العدد S مجموع المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، أي أن $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

وإذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ متباعدة (أي أن $\lim_{n\to\infty} S_n$ غير موجود) فنقول إن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة وليس لها مجموع .

مثال (3)

هل أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة ؟

الحل :

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\Leftarrow S_n \to 1 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة.

مبرهنة (4) (بعض المسلسلات اللانهائية الخاصة)

(1) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ حيث $r \neq 0, a \neq 0$ (تسمى بالمتسلسلة الهندسية **Geometric Series** ويطلق على العدد r بأساس المتسلسلة). تكون متقاربة أذا كان $|r| < 1$ وان $S = \frac{a}{1-r}$ وماعدا ذلك تكون متباعدة.

(2) المسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (تسمى بالمتسلسلة التوافقية **Harmonic series** وتكون متباعدة)

البرهان:

(1)

(ا) إذا كانت $r = 1$ فان $S_n = a + a + \cdots + a = na$

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{na\}$ غير متقاربة ، لو كانت متقاربة فإنها مقيدة ، وهذا بعني انه يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|na| \le M$ لكل $n \in Z^+ \Leftarrow n|a| \le M \Leftarrow n \le \frac{M}{|a|}$ لكل $n \in Z^+$ وهذا يناقض خاصية ارخميدس. وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متباعدة.

(ب) إذا كانت $r = 1$ فان $\{S_n\} = \{a, 0, a, 0, \cdots\}$

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ متباعدة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متباعدة.