(ج) إذا كانت $|r| \neq 1$ فان

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}, \quad rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n \quad \Leftarrow \quad (1-r)S_n = a(1-r^n) \quad \Leftarrow$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

- إذا كانت $|r| > 1$ فان المتتابعة $\{r^n\}$ غير متقاربة ، لو كانت متقاربة فإنها مقيدة ، وهذا بعني انه يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|r^n| \leq M$ لكل $n \in Z^+$

حسب خاصية ارخميدس، يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن $k > M$

بما أن $|r| > 1 \quad \Leftarrow \quad M|r| > M$

$\Leftarrow \quad n|a| \leq M \quad \Leftarrow \quad n \leq \frac{M}{|a|}$ لكل $n \in Z^+$ وهذا يناقض $\Leftarrow$ المتتابعة $\{r^n\}$ غير متقاربة . $\Leftarrow$

المتتابعة $\{S_n\}$ غير متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متباعدة.

- إذا كانت $|r| > 1$ فان المتتابعة $\{r^n\}$ متقاربة وان $r^n \to 0$

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \to \frac{a}{1-r} - 0 = \frac{a}{1-r}$$

أي أن $S_n \to \frac{a}{1-r}$. إذن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متقاربة وان $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$.

(2)

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Leftarrow \quad S_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ لكل $n \in Z^+$

وهذا يعني انه إذا كان $m = 2n$ ، $n \geq 1$ فان $|S_m - s_n| \geq \frac{1}{2}$ لكل $n, m \in Z^+$

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ ليست متتابعة كوشي $\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ غير متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

مثال (5)

(1) المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ متقاربة لان $r=\frac{1}{2}$ وان $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$

(2) المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}$ متباعدة لان $r=4$

(3) المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{6})^{n-1}$ متقاربة لان $r=-\frac{1}{6}$ وان $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{6})^{n-1}=\frac{6}{7}$

(4) المتسلسلة الهندسية اللانهائية $0.1+0.01+0.001+\cdots$ متقاربة لان

$$0.1+0.01+0.001+\cdots=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10^{n-1}}$$

أي أن $a=\frac{1}{10},\quad r=\frac{1}{10}\quad\Leftarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{1}{9}$

(5) العدد $0.16666\cdots$

$$0.16^{\circ}=0.16666\cdots=0.1+0.06+0.006+0.0006+\cdots=0.1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{100}\cdot\frac{1}{10^{n-1}}$$

أي أن $a=\frac{6}{100},\quad r=\frac{1}{10}\quad\Leftarrow\quad 0.16^{\circ}=0.1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n+1}}=\frac{1}{6}$

مبرهنة(6)

لتكن كل من $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلة لانهائية متقاربة

(1) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ متقاربة وان

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

(2) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n$ متقاربة لكل $\lambda\in R$ وان

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

البرهان:

(1) ليكن $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ و $T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$

بما أن كل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائيـة متقـاربة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$

$\Leftarrow$ كل من $\{S_n\}$، $\{T_n\}$ متقاربة وعلية $S_n \to S$ ، $T_n \to T$ $\Leftarrow$ $S_n + T_n \to S + T$

$$S_n + T_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \to S + T$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

نتيجة (7)

أذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وكانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فأن

(1) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ متباعدة.

(2) المسلسلة أللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda b_n$ متباعدة لكل $\lambda \neq 0$.

البرهان:

(1)

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ متقاربة

بما إن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة $\Leftarrow$ المتسلسلة اللانهائية $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n - a_a)$ متقاربة وهذا تناقض.

مثال (8)

المتسلسلتان ألانهائيتين $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ، $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ مبتاعتان ولكن $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ متقاربة

اختبار التقارب A converging Test

في هذا البند سوف نتطرق إلى الشروط الكافية لجعل المتسلسلة اللانهائية متقاربة ونتطرق أيضا إلى كيفية أيجاد مجموع المتسلسلة المتقاربة. والمبرهنة الآتية تعطي شرطاً ضرورياً للتقارب

مبرهنة (9)

أذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فان $a_n \to 0$

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

بما أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة وعلية $\{S_n\}$متتابعة كوشي $\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \quad \text{لكل} \quad n, m > k$$

إذا كان $n > k$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}, \quad S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$

$$|a_{n+1} - 0| = |a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$$

وعلية $a_n \to 0$.

ملاحظة

إذا كان $a_n \to 0$ فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ليس بالضرورة أن تكون متقاربة والمثال التالي يوضح ذلك

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة بالرغم من $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

نتيجة (10)

(1) أذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة .

(2) أذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وكان $a_n \neq 0$ لكل قيم n فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ تكون متباعدة.

مثال(11)

برهن أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{3n^2-1}$ متباعدة

البرهان:

$$a_n \to \frac{1}{3} \neq 0 \quad \Leftarrow \quad a_n = \frac{n^2+2n+3}{3n^2-1}$$

$\Leftarrow$ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{3n^2-1}$ متباعدة

تعريف (12)

يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بأنها مهيمنة أو متغلبة**(Dominate)** على المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أذا كان $|a_n| \le b_n$ لكل قيم n.

مبرهنة (13) اختبار المقارنة

لتكن كل من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائية غير سالبة الحدود ولتكن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مهيمنة على $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، بحيث أن $a_n \le b_n$ لكل قيم n.

(يمكن صياغة أعلاه بالشكل ليكن $0 \le a_n \le b_n$ لكل قيم n).

(1) أذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

(2) أذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة

البرهان:

(1)

ليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ و $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة $\Leftarrow$ المتتابعة $\{T_n\}$ متقاربة وعلية المتتابعة $\{T_n\}$ مقيدة

$\Leftarrow$ يوجد $M > 0$ بحيث أن $|T_n| \le M$ لكل قيم n

بما أن $0 \le a_n \le b_n$ لكل قيم n $\Leftarrow$ $0 \le \sum_{k=1}^{n} a_n \le \sum_{k=1}^{n} b_n$ لكل قيم n

$\Leftarrow$ $0 \le S_n \le T_n$ $\Leftarrow$ $0 \le S_n \le M$ $\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ مقيدة

بما أن $a_n \ge 0$ لكل قيم n $\Leftarrow$ $S_n \le S_{n+1}$ لكل قيم n

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ غير متناقصة وعلية المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة$\Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

(2)

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة$\Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

وهذا تناقض $\Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة .

مثال(14)

ناقش تقارب المتسلسلات اللانهائية الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \quad (1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2} \quad (2)$$

الحل:

(1)

بما أن $n^2+2n+1>n^2+2n \Leftarrow (n+1)^2>n(n+1)$ لكل قيم n

$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}$ لكل قيم n

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ متقاربة

(2)

بما أن $n+2<3n \Leftarrow \frac{1}{n+2}<\frac{1}{3n}$ لكل قيم n

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ متباعدة

مثال(15)

ليكن $a_n>0$ لكل قيم n ، فإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ متقاربة أيضا .

الحل :

$$\frac{a_n}{1+a_n}<a_n \Leftarrow \frac{1}{1+a_n}<1 \Leftarrow 1+a_n>1 \Leftarrow a_n>0$$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ متقاربة

تعريف (16)

لتكن $P \in R$ ، يطلق على المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متسلسلة- p $(P\text{ - Series})$

مبرهنة (17)

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ تكون متقاربة أذا كان $P > 1$ وأنها متباعدة أذا كان $P \leq 1$.

البرهان :

(1)

إذا كانت $p = 1$ $\Leftarrow$ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

(2)

إذا كانت $P < 1$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متباعدة

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متباعدة عندما $P \leq 1$.

(3)

إذا كانت $P > 1$ نقارن مع المتسلسلة الهندسية التي فيها $a = 1, \quad r = \frac{2}{2^p}$

بما أن $p > 1$ $\Leftarrow$ $r < 1$

$\Leftarrow$ المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{2^p})^{n-1}$ متقاربة

بما أن $\frac{1}{n^p} < (\frac{2}{2^p})^{n-1}$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متقاربة.

مبرهنة (18)

ليكن $a_n \geq 0, b_n > 0$ لكل قيم n . أذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ فأنه أما كلتا المسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ،

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتان أوكلتاهما متباعدتان.

نتيجة (19)

ليكن $a_n > 0, b_n > 0$ لكل قيم n . أذا كان $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ وكانت المسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فان

المسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أيضاً.

مبرهنة (20) **اختبار النسبة** Ratio test

ليكن $a_n > 0$ لكل قيم n ولتكن المتتابعة $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ متقاربة إلى العدد الحقيقي r , أي أن

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ فأن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون

(1) متقاربة إذا كان $r < 1$.

(2) متباعدة إذا كان $r > 1$.

وفي حالة $r = 1$ فأن الاختبار يكون فاشل أي لا يعطي معلومات عن المتسلسلة وعليه يجب تطبيق اختبار آخر لمعرفه فيما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة .

البرهان :

(1)

إذا كان $r < 1$ $\Leftarrow$ يوجد $\lambda \in R$ بحيث أن $r < \lambda < 1$ (حسب كثافة الأعداد النسبية)

$\Leftarrow$ $\lambda - r > 0$

بما أن $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to r$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \lambda - r$ لكل $n > k$

$\Leftarrow$ $-(\lambda - r) < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < \lambda - r$ لكل $n > k$ $\Leftarrow$ $2r - \lambda < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda$ لكل $n > k$

ليكن $n > k$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}} \cdot \frac{a_{k+4}}{a_{k+3}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda \cdot \lambda \cdots \lambda = \lambda^{n-k}$$

$\Leftarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_{k+1}} < \lambda^{n-k} = \frac{\lambda^n}{\lambda^k}$ $\Leftarrow$ $a_{n+1} < \frac{a_{k+1}}{\lambda^k} \cdot \lambda^n$

بما أن $\lambda < 1$ $\Leftarrow$ المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{\lambda^k} \lambda^n$ متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة (حسب اختبار المقارنة)

(2)

إذا كان $r > 1$ $\Leftarrow$ يوجد $\alpha \in R$ بحيث أن $1 < \alpha < r$ (حسب كثافة الأعداد النسبية)

$\Leftarrow$ $r - \alpha > 0$

بما أن $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to r$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < r - \alpha$ لكل $n > k$

$\Leftarrow$ $-(r - \alpha) < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < r - \alpha$ لكل $n > k$ $\Leftarrow$ $\alpha < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 2r - \alpha$ لكل $n > k$

$\Leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha$ لكل $n > k$ وعلية نحصل على $\Leftarrow a_{n+1} > \frac{a_{k+1}}{\alpha^k}\alpha^n$ لكل $n > k$

بما أن $\alpha > 1$ $\Leftarrow$ المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{\alpha^k}\alpha^n$ متباعدة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة (حسب اختبار المقارنة)

(3)

(أ) لتكن $a_n = \frac{1}{n}$ نلاحظ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة وان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad \Leftarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

(ب) لتكن $a_n = \frac{1}{n^2}$ نلاحظ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة وان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad \Leftarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1}$$

مبرهنة (21)

ليكن $a_n > 0$ لكل قيم n .إذا وجد عدد صحيح موجب k وعدد موجب $b < 1$ بحيث إن $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b$ لكل $n > k$ فان المتسلسلة اللانهائية تكون متقاربة .

البرهان :

H.W

مثال(22)

ناقش تقارب المتسلسلات اللانهائية الآتية :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

الحل:

(1)

$a_n = \frac{2^n}{n!}$ $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}=2\frac{1}{n+1} \quad \Leftarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$$ وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ متقاربة.

(2)

$$a_n=\frac{2^n}{n^2} \qquad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}}=2(\frac{n}{n+1})^2 \quad \Leftarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$$ وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ متباعدة.

(3)

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{2^n} \qquad a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad \Leftarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$$ وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$

متقاربة.

مبرهنة (23) **اختبار الجذر** The Root Test

ليكن $a_n \geq 0$ لكل قيم n .

(1) إذا وجد عدد صحيح موجب k وعدد موجب $b<1$ بحيث إن $\sqrt[n]{a_n}<b$ لكل $n>k$ فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة .

(2) إذا كان $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ لعدد غير منتهي من الحدود a_n فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متباعدة .

البرهان :

(1)

نفرض يوجد $k\in Z^+$ وعدد موجب $b<1$ بحيث إن $\sqrt[n]{a_n}<b$ لكل $n>k$

$\Leftarrow \quad a_n<b^n$ لكل $n>k$

بما أن $b<1$ $\Leftarrow$ المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty}b^n$ متقاربة

وعلية تكون المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة (حسب اختبار المقارنة)

(2)

نفرض يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ لكل $n > k$

$\Leftarrow a_n \geq 1$ لكل $n > k$

بما أن المتسلسلة الهندسة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ متباعدة لان أساسها يساوي واحد (أي أن $r = 1$)

وعلية تكون المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة (حسب اختبار المقارنة)

مثال(24)

ناقش تقارب المتسلسلات اللانهائية الآتية :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3}$

الحل:

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$$

أولا: نختبر المتسلسلة اللانهائية . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

$\Leftarrow a_n = \frac{2^n}{n^n} \Leftarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{n} \Leftarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{2}{3}$ لكل $n > 2$

$\Leftarrow$ المتسلسلة اللانهائية . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ متقاربة

(2)

H.W

ملاحظة

المبرهنة التالية تسمى بمبرهنة القيمة الوسطى للتكامل والتي سنذكرها بدون برهان وذلك لحاجتنا في مبرهنة اختبار التكامل

مبرهنة (25)

أذا كانت الدالة $f : [a,b] \to R$ مستمرة فانه يوجد $c \in (a,b)$ بحيث أن

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

مبرهنة (26) **اختبار التكامل** Integral Test

لتكن f دالة مستمرة ، موجبة ومتناقصة ومعرفة لكل $x \geq 1$. وليكن $a_n = f(n)$ لكل قيم n من الإعداد الصحيحة الموجبة فان المتسلسلة غير المنتهية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة أذا وفقط أذا كان التكامل المعتل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ متقاربا.

البرهان:

ليكن k عدد صحيح موجب ولناخذ التكامل المحدد $\int_{k-1}^{k} f(x)dx$ باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل ، يوجد $c \in (k-1,k)$ بحيث أن

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx = f(c)(k-(k-1)) = f(c)$$

بما أن الدالة f متناقصة $f(k-1) \geq f(c) \geq f(k)$ وعليه فان

$$f(k-1) \geq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq f(x)$$

لذلك يكون لكل عدد صحيح موجب n

$$\sum_{k=2}^{n} f(k-1) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_{1}^{k} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \qquad \cdots (1)$$

الآن

إذا كان $\int_1^{\infty} f(x)dx = L$ فان

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = L \qquad \cdots (2)$$

من (1) ، (2) نحصل على

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_{1}^{n} f(x)dx \leq f(1) + L$$

$\Leftarrow$ متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ لها قيد أعلى هو العدد $f(1)+L$ وبما أن المتتابعة $\{S_n\}$ متزايدة $\Leftarrow \{S_n\}$ متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية متقاربة. إذا لم يكن للتكامل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ قيدا أعلى فسوف لن يكون للمتتابعة $\{S_n\}$ قيد أعلى أيضا لان

$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_{1}^{n} f(x)dx$ لجميع قيم n ، وبذلك تكون المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة

مثال(27)

استخدم اختبار التكامل لإثبات مبرهنة متسلسلة- P

الحل:

$$a_n = \frac{1}{n^p} \quad \Leftarrow \quad a_n = f(n) = \frac{1}{n^p} \quad \text{لكل } n \geq 1$$

$$\int_{1}^{t} f(x)dx = \int_{1}^{t} x^{-p}dx = \begin{cases} \dfrac{t^{i-p}-1}{1-p}, & p \neq 1 \\ \ln t, & p = 1 \end{cases}$$

(1) عندما $p > 1$ فان $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$ وعليه

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} f(x)dx = -\frac{1}{1-p}$$

(2) عندما $p < 1$ فان $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = \infty$ وعندما $p = 1$ فان $\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$ وعليه $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ غير موجود عندما $p \leq 1$

وبذلك تكون المتسلسلة- P متقاربة عندما $p > 1$ ومتباعدة عندما $p \leq 1$.

مثال(28)

هل أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ متقاربة ؟

الحل :

$a_n = ne^{-n}$ لكل $n \geq 1$ $\Leftarrow$ $f(x) = xe^{-x}$ كل $x \geq 1$ $\Leftarrow$ f مستمرة ، موجبة

$f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(1-x) < 0$

لكل $x \geq 1 \Leftarrow$ f متناقصة وكذلك $f(x) > 0$ لكل $x \geq 1 \Leftarrow$ f موجبة

$$\int_{1}^{t} f(x)dx = \int_{1}^{t} xe^{-x}dx = -e^{-x}(x+1)\,|_1^t = -\frac{t+1}{e^t} + \frac{2}{e}$$

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} f(x)dx = -0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$$

$\Leftarrow$ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ متقاربة

المتسلسلات المتناوبة Alternations Series

في هذا الجزء من المحاضرة سنتطرق إلى تقارب أو تباعد المتسلسلات اللانهائية التي حدودها موجبة وسالبه على التناوب .

تعريف (29)

يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ بأنها متناوبة إذا كان $a_n > 0$ لكل قيم n.

مبرهنة (30)

إذا كان $0 < a_{n+1} < a_n$ لكل عدد صحيح موجب n وكان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ فـان المتسلسلتين المتناوبتين $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$ متقاربتان .

البرهان:

مبرهنة (31)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ متسلسلة متناوبة بحيث أن $0 < a_{n+1} < a_n$ لكل عدد موجب n وان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ فان الخطأ الناتج من مجموع اخذ أول k من الحدود كتقريب لمجموع المتسلسلة اللانهائية المتناوبة هو اقل من a_{k+1} ، الذي هو القيمة المطلقة لأول حد من الحدود المهملة.

تعريف (32)

يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ بأنها متقاربة مطلقا أو تقترب بصوره مطلقه **(Absolutely convergent)** إذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة . و يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ بأنها متقاربة شرطياً أو تقترب بصورة مشروطة**(Conditionally convergent)** إذا كانت المتسلسلة اللانهائية متقاربة ولكنها ليست متقاربة مطلقاً (إي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متباعدة) .

مثال (33)

(1) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$ متقاربة مطلقا لان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ متقاربة

(2) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n}$ متقاربة ولكن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة وعليه المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n}$ متقاربة شرطيا.