مبرهنة (34)
كل متسلسلة لانهائية متقاربة مطلقا تكون متقاربة والعكس غير صحيح دائما ,أي إذا كانت المتسلسلة اللانهائية متقاربة فليس بالضرورة إن تكون متقاربة مطلقاً .

البرهان:

مبرهنة (35)

لتكن $a_n \neq 0$ لكل قيم n وليكن $P = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ حيث $P \in R$ فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون

(1) متقاربة مطلقاً إذا كان $P < 1$.
(2) متباعدة إذا كان $P > 1$.

وفي حالة $P = 1$ فان الاختبار يكون فاشل المبرهنة الآتية تبين أهمية التقارب المطلق

البرهان:
نفس برهان المبرهنة (20)

مبرهنة (36)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة لانهائية ولتكن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة تحصل عليها من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بإعادة ترتيب حدود المتسلسلة بأية طريقة كانت .

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارباً مطلقاً إلى S فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تكون متقاربة مطلقاً أيضاً ولنفس المجموع S.

ضرب المتسلسلات اللانهائية (Product Infinites Series)

لتكن كل من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائية وليكن

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$S_n T_n = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)$$

يرمز للمتسلسلة اللانهائية التي متتابعة المجاميع الجزئية لها هي المتتابعة $\{S_n T_n\}$ بالرمز $\sum P_n$ فأن

$$S_n T_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

$$P_n = S_nT_n - S_{n-1}T_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})$$
$$= ((a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n)((b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})$$
$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})b_n + a_n(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + a_nb_n = S_{n-1}b_n + a_nT_n$$
$$\Rightarrow \quad P_n = S_{n-1}b_n + a_nT_n$$

مما تقدم نستطيع إن نقول إذا كانت $T_n \to T$, $S_n \to S$ فان المتسلسلة $\sum P_n$ متقاربة وأن $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = ST$.

مبرهنة (37)

إذا كانت كل من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائية متقاربة مطلقاً فان ضرب المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ يكون أيضا متقاربة مطلقاً وكذلك $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = ST$ حيث $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$.

الآن نتطرق إلى تعريف آخر لضرب المتسلسلات والذي يسمى ضرب كوشي .

تعريف(38)

لتكن كل من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائية تسمى المتسلسلة $\sum C_n$ بضرب كوشي للمتسلسلتين $\sum a_n, \sum b_n$ إذا كان $C_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$.

مبرهنة (39)

لتكن كل من $\sum a_n$, $\sum b$ متسلسلة لانهائية .

(1) إذا كانت كل من $\sum a_n, \sum b_n$ متقاربة مطلقا فان ضرب كوشي $\sum C_n$ تكون متقاربة مطلقاً وان $\sum C_n = (\sum a_n)(\sum b_n) = ST$.

(2) إذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum a_n$ متقاربة مطلقاً وان $\sum a_n = S$ وكانت المتسلسلة اللانهائية $\sum b_n$ متقاربة وان $\sum b_n = T$ فان ضرب كوشي $\sum C_n$ تكون متقاربة وان $\sum C_n = ST$.

المصادر

[1] عادل غسان نعوم،"**مقدمة في التحليل الرياضي**"، جامعة بغداد – العراق 1986.
[2] **Apostol,** " Mathematical Analysis"**,2 nd, 1974**
[3] **Ash, R. B.,** " Real Analysis And Probability"**, 1972.**
[4] **Billingsley, P.,** " Probability And Measure " **, 1979-1986.**
[5] **Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.,**" Real Variables" **, 1969.**

Edwin Hewitt Karl Stromberg, " Real And Abstract Analysis" **, 1978** [6]
Folland . G. B.," Real Analysis"**,2 nd, 1999** [7]
Goldberg, R. R.," Methods Of Real Analysis"**,1979.** [8]
Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.," Introductory Real Analysis",**1970.** [9]
Royden, H. L.," Real Analysis",**1988** [10]
Rudin, W., " Principles Of Mathematical Analysis",**1953** [11]
Rudin, W., " Real And Complex Analysis",**19** [12]
Ruel V. Churchill James W. Brown Roger F. Verhey," Complex Variables And Applications",**3 rd, 1974.** [13]
Scott, D. B., And Tims, S. R.," Mathematical Analysis An Introduction",**1966.** [14]
Sharma, J. N And Vasishtha, A. R.," Real Analysis",**5 th, 1977.** [15]
Walter Rudin," Principles Of Mathematical Analysis",**2 nd, 1964.** [16]
Walter Rudin," Real And Complex Analysis",**2 nd, 1974.** [17]
Walter Rudin," Principles Of Mathematical Analysis",**3 rd, 1986.** [18]

محاضرات
الأستاذ المساعد الدكتور نوري فرحان المياحي
قسم الرياضيات – كلية علوم الحاسوب والرياضيات – جامعة القادسية – العراق

ر331
التحليل الرياضي (1) Mathematical Analysis I

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

المحاضرة الرابعة
الفضاءات المترية Metric Spaces

تعريف (1)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن R تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية. يقال عن الدالة $d : \mathrm{X}\times\mathrm{X} \to R$ بأنها دالة مترية (Metric function) على X إذا تحققت البديهيات الآتية:

(1) $d(x,y) \geq 0$ لكل $x, y \in X$

(2) $d(x,y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$ لكل $x, y \in X$

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ لكل $x, y, z \in X$ (المتراجحة المثلثية)

الفضاء المتري (Metric Space) هو الثنائي (X, d) حيث Xمجموعة غير خالية ، d دالة مترية على X . سوف نكتب X بدلا من (X, d) في حالة عدم وجود التباس . عناصر المجموعة X تسمى بالنقاط ولكل $x, y \in \mathrm{X}$ يسمى العدد الحقيقي $d(x,y)$ بالبعد بين النقطتين x, y . كما تسمى d بالبعد أو المسافة . من البديهيتين (1) و(2) نستنتج إذا كانت $x \neq y$ فان $d(x,y) > 0$ وعليه البعد بين أي نقطتين مختلفتين يكون موجب .

مثال (2)

لتكن الدالة $d_u : R\times R \to R$ معرفة بالصيغة $d_u(x,y) = |x-y|$ لكل $x.y \in R$ فان d_u تكون دالة مترية على R ، وان (R, d_u) يسمى بالفضاء المتري الاعتيادي (Usual Metric Space)

الحل:-

(1)

ليكن $x, y \in R \Leftarrow x - y \in R \Leftarrow |x - y| \geq 0 \Leftarrow d_u(x,y) \geq 0$

(2)

$$d_u(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(3)

ليكن $x, y \in R$

$$d_u(x,y) = |x-y| = |y-x| = d_u(y,x)$$

(4)

ليكن $x, y, z \in R$

$$x - y = (x - z) + (z - y)$$
$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \le |x - z| + |z - y|$$
$$d_u(x, y) \le d_u(x, z) + d_u(z, y)$$

$\Leftarrow d_u$ دالة مترية على R

مثال (3)

لتكن الدالة $d : R \times R \to R$ معرفة بالصيغة $d(x, y) = |x - y| + 1$ لكل $x, y \in R$ برهن على أن d ليست دالة مترية على R

الحل:-

ليكن $x, y \in R$ بحيث أن $x = y \Leftarrow d(x, y) = 1$ وهذا يعني أن البديهية الثانية ليست متحققة $\Leftarrow d$ ليست مترية

مثال (4)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن الدالة $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to R$ بالصيغة

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \ne y \end{cases}$$

لكل $x, y \in \mathrm{X}$. فان d دالة مترية على X ، وان (X, d) يسمى فضاء متري مبعثر (Discrete Metric Space)

الحل:-

(1)

بما أن $d(x, y) = 0$ أو $d(x, y) = 1$ لكل $x, y \in \mathrm{X} \Rightarrow d(x, y) \ge 0$ لكل $x, y \in \mathrm{X}$

(2)

ليكن $x, y \in \mathrm{X}$

إذا كان $x = y$ فان $d(x, y) = 0$ (حسب تعريف الدالة d)، أما إذا كان $d(x, y) = 0$ فان $x = y$ لأنه لو كان $x \ne y$ فان $d(x, y) = 1$ وهذا تناقض وعليه

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(3)

ليكن $x, y \in \mathrm{X}$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \ne y \end{cases} = \begin{cases} 0, & y = x \\ 1 & y \ne x \end{cases} = d(y, x)$$

(4)

ليكن $x, y, z \in X$

(ا) إذا كان $x = y \Leftarrow d(x, y) = 0$

بما أن $d(x, z) \geq 0, d(z, y) \geq 0 \Leftarrow d(x, z) + d(z, y) \geq 0$

$\Leftarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(ب) إذا كان $x \neq y \Leftarrow d(x, y) = 1$

وبهذه الحالة يكون z لايساوي احدهما على الأقل أي أن $z \neq x$ أو $z \neq y$

وليكن $z \neq x$ مثلا $\Leftarrow d(x, z) = 1$

بما أن $d(z, y) \geq 0 \Leftarrow d(x, z) + d(z, y) \geq 1$

وعليه $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$\Leftarrow d$ دالة مترية على X

مثال (5)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن الدالة $d : X \times X \to R$ بالصيغة $d(x, y) = 0$ لكل $x, y \in X$. فان d دالة مترية على X ، وان (X, d) يسمى فضاء متريا متماسكا (Indiscrete Metric Space)

مبرهنة (6)

ليكن (X, d) فضاء متريا

(1) $|d(x, z) - (d(z, y)| \leq d(x, y)$ لكل $x, y, z \in X$

(2) $|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w)$ لكل $x, y, z, w \in X$

البرهان :-

(1)

$$d(x.z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d(x, y) + d(z, y)$$
$$d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y) \quad \cdots(1)$$

وكذلك

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) = d(x, z) + d(x, y)$$
$$d(z, y) - d(x, z) \leq d(x, y)$$
$$-(d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$$
$$d(x.z) - d(z, y) \geq -d(x, y) \quad \cdots(2)$$

من العادلات(1)،(2) نحصل على

$$\Leftarrow -d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y) \Leftarrow |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

(2)

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y) = d(x, z) + d(z, w) + d(y, w)$$
$$d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(y, w) \quad \cdots(3)$$

$$d(z,w) \le d(z,x) + d(x,w) \le d(z,x) + d(x,y) + d(y,w) = d(x,z) + d(x,y) + d(y,w)$$
$$d(z,w) - d(x,y) \le d(x,z) + d(y,w)$$
$$d(x,y) - d(z,w) \ge -(d(x,z) + d(y,w) \quad \cdots(4)$$

من العادلات(3)،(4) نحصل على

$$-(d(x,z) + d(y,w) \le d(x,y) - d(z,w) \le d(x,z) + d(y,w)$$

وعلية

$$|d(x,y) - d(z,w)| \le d(x,z) + d(y,w)$$

مبرهنة (7)

لتكن X مجموعة غير خالية فان الدالة $d : X \times X \to R$ تكون دالة مترية إذا وفقط إذا تحقق الشرطين الآتيين :-

(1) $d(x,y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

(2) $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$ لكل $x, y, z \in X$

البرهان:-

نفرض d دالة مترية

الشرط(1) متحقق لأنه بديهية (2) من بديهيات الدالة المترية وكذلك الشرط (2) يتحقق من البديهيات (4) , (2) من بديهيات الدالة المترية

الاتجاه المعاكس ، نفرض الشرطين (1) , (2) متحققين.

(1)

ليكن $x, y \in X$. باستخدام الشرط (2) نحصل على

$$d(x,x) \le d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y)$$

ولكن $d(x,x) = 0$ حسب الشرط (1) $\Leftarrow d(x,y \ge 0$

(2)

نفس الشرط (1)

(3)

ليكن $x, y \in X$. باستخدام الشرط (2)

$$d(y,x) \le d(y,y) + d(x,y) = 0 + d(x,y) = d(x,y)$$
$$d(x,y) \le d(x,x) + d(y,x) = 0 + d(y,x) = d(y,x)$$
$$\Leftarrow d(x,y) = d(y,x) \Leftarrow d(y,x) \le d(x,y), d(x,y) \le d(y,x)$$

(4)

ليكن $x, y, z \in X$

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z) = d(x,z) + d(z,y)$$

$\Leftarrow d$ دالة مترية على X

تعريف (8)

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية في X .
قطر المجموعة A يرمز له بالرمز $\delta(A)$ ويعرف بالصيغة

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$$

وإذا كانت $A=\phi$ أو A تحتوي على عنصر واحد فقط فان $\delta(A)=0$. بعد(المسافة) النقطة p عن المجموعة A يرمز له بالرمز $d(p,A)$ ويعرف بالصيغة

$$d(p,A)=\inf\{d(p,x):x\in A\}$$

ومن الواضح انه إذا كانت $p\in A$ فان $d(p,A)=0$ وإذا كانت $A=\phi$ فان $d(p,\phi)=\infty$.
لتكن B مجموعة جزئية غير خالية في X . البعد (المسافة) بين A,B يرمز له بالرمز $d(A,B)$ ويعرف بالصيغة

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}$$

ومن الواضح أيضا إذا كانت $A=\phi$ فان $d(\phi,B)=\infty$

مثال(9)

ليكن (R,d_u) فضاء متري اعتيادي ولتكن $A=[1,2),B=(2,4]$
نلاحظ أن

$$\delta(B)=1,\quad \delta(B)=2$$

$$d(\frac{5}{4},A)=0,\quad d(\frac{3}{2},B)=\frac{1}{2},\quad d(9/4,B)=0,\quad d(5,B)=1$$

$$d(A,B)=0$$

مبرهنة(10)

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن كل من A,B مجموعة جزئية غير خالية في X

(1) $\delta(A)\geq 0$, $d(p,A)\geq 0$ لكل $d(A,B)\geq 0, p\in X$
(2) إذا كانت A منتهية فان $\delta(A)<\infty$
(3) إذا كانت $A\cap B\neq\phi$ فان $d(A,B)=0$
(4) $|(p,A)-d(q,A)|\leq d(p,q)$ لكل $p,q\in X$
(5) إذا كانت $A\subset B$ فان $d(p,A)\geq d(p,B)$ لكل $p\in X$

البرهان :-

(1) ,(2) نسخ من التعريف مباشرة
(3)

بما أن $A\cap B\neq\phi \Leftarrow$ يوجد على الأقل عنصر ينتمي إلى التقاطع وليكن x_0 مثلا أي أن

$$x_0\in A\cap B \Leftarrow x_0\in A \text{ أو } x_0\in B$$

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}\leq d(x,y)\ \forall x\in A,\forall y\in B$$

$d(A,B)=0 \Leftarrow d(A,B)\geq 0$ ولكن $d(A,B)\leq d(x_0,x_0)=0 \Leftarrow$

(4)

بما أن

$d(p,A)\geq d(q,A) \Leftarrow d(p,q)=d(q,p)$ $\quad d(p,A)-d(q,A)\geq 0$

$|d(p,A)-d(q,A)|=d(p,A)-d(q,A) \quad \cdots(1)$

$d(p,A)=\inf\{d(p,x): x\in A\}\leq d(p,x)\ \forall x\in A$

بما أن

$d(p,A)=\inf\{d(p,x): x\in A\}\leq d(p,x)$

لكل $x\in A$ $\quad d(p,A)-d(q,A)\leq p(p,x)-d(q,A) \Leftarrow$ لكل $x\in A$

$|d(p,A)-d(q,A)|\leq d(p,x)-d(q,A) \quad \cdots(2)$

بما أن $d(q,A)=\inf\{d(q,y): y\in A\}$

$\Leftarrow$ لكل $\varepsilon>0$ يوجد $y\in A$ بحيث آن $d(q,A)\geq d(q,y)-\varepsilon$

$\Leftarrow -d(q,A)\leq -d(q,y)+\varepsilon \Leftarrow$

$d(p,y)-d(q,A)\leq d(p,y)-d(q,y)+\varepsilon$

$|d(p,A)-d(q,A)|\leq d(p,y)-d(q,y)+\varepsilon \quad \cdots(3)$

بما أن

$|d(p,A)-d(q,A)|\leq d(p,q)+\varepsilon \Leftarrow d(p,y)-d(q,y)\leq d(p,q) \Leftarrow d(p,y)\leq d(p,q)+d(y,q)$

لكل $\varepsilon>0$ $\quad |d(p,A)-d(q,A)|\leq d(p,q) \Leftarrow$

(5) لتكن $p\in X$

بما أن $A\subset B \Leftarrow \{d(p,x): x\in A\}\subset\{d(p,x): x\in B\} \Leftarrow$

$\inf\{d(p,x): x\in A\}\geq \inf\{d(p,x): x\in B\}$

$d(p,A)\geq d(p,B) \Leftarrow$

ملاحظة

(1) إذا كان $d(p,A)=0$ فليس من الضروري أن يكون $p\in A$

(2) إذا كان $d(A,B)=0$ فليس من الضروري أن يكون $A\cap B\neq\phi$ والمثال التالي يوضح ذلك

مثال (11)

ليكن (R,d_u) فضاء متري اعتيادي

(1) إذا كانت $A=(a,b)$ فان $d(b,A)=0$ وان $b\notin A$

(2) إذا كانت $A=[0,1), B=(1,2]$ فان $d(A,B)=0$ وان $A\cap B=\phi$

الحل:-

(1)

نفرض $d(b,\mathrm{A}) \neq 0$

بما أن $d(b,\mathrm{A}) \geq 0$ $\Leftarrow$ $d(p,\mathrm{A}) > 0$ $\Leftarrow$ حسب خاصية ارخميدس , يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $\frac{1}{n} < d(p,\mathrm{A})$

بما أن $d(p,\mathrm{A}) = \inf\{d(p,x) : x \in \mathrm{A}\}$ $\Leftarrow$ $d(p,\mathrm{A}) \leq d(b,x)$ لكل $x \in \mathrm{A}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n} \leq d(b,x)$ لكل $x \in \mathrm{A}$

ولكن $d(b,x) = |b-x|$ لان (R, d_u) فضاء متري اعتيادي

$\Leftarrow$ $\frac{1}{n} \leq |b-x|$ لكل $x \in \mathrm{A}$ $\Leftarrow$ $x < b - \frac{1}{n}$ لكل $x \in \mathrm{A}$

$\Leftarrow$ $x < b - \frac{1}{n} < b$ لان $b - \frac{1}{n} \in \mathrm{A}$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{n} < \left| b - (b - \frac{1}{n}) \right| < \frac{1}{n}$ وهذا تناقض. وبالمثل نبرهن (2)

تعريف(12)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن R تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية. يقال عن الدالة $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to R$ بأنها دالة شبه مترية (Pseudo-Metric function) على X إذا تحققت البديهيات الآتية:

(1) $d(x,y) \geq 0$ لكل $x, y \in X$

(2) $d(x,x) = 0$ لكل $x \in X$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$ لكل $x, y \in X$

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ لكل $x, y, z \in X$ (المتراجحة المثلثية)

الدالة المترية d على المجموعة X تكون مترية إذا كان $d(x,y) \neq 0$ لكل $x \neq y$. الفضاء شبه المتري (Pseudo-Metric Space) هو الثنائي (X, d) حيث X مجموعة غير خالية ، d دالة شبه مترية على X. سوف نكتب X بدلا من (X, d) في حالة عدم وجود التباس.

مبرهنة(13)

ليكن (X, d) فضاء شبه متري . نعرف العلاقة $\sim$ على X كالأتي :

$x \sim y$ إذا وفقط إذا كان $d(x,y) = 0$

(1) $\sim$ تكون علاقة تكافؤ على X

(2) إذا كان $[x]$ يمثل صف التكافؤ إلى x وكانت $A = \{[x] : x \in X\}$ ، فان الدالة $d^* : A \times A \to R$

المعرفة بالصيغة : $d^*([x],[y]) = d(x,y)$ تكون مترية على A ، أي إن (A, d^*) فضاء متريا

البرهان:

(1)

بما أن $d(x,x)=0$ لكل $x\in X \Leftarrow x\sim x$ وعلية $\sim$ انعكاسية

ليكن $x\sim y \Leftarrow d(x,y)=0$ ولكن $d(x,y)=d(y,x) \Leftarrow d(y,x)=0 \Leftarrow y\sim x$ وعلية $\sim$ متناظرة.

ليكن $y\sim z,\ x\sim y \Leftarrow d(y,z)=0,\ d(x,y)=0$

بما أن $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z) \Leftarrow d(x,z)\le 0$

ولكن $d(x,z)\ge 0 \Leftarrow d(x,z)=0 \Leftarrow x\sim z$ وعلية $\sim$ متعدية.

وهذا يعني أن $\sim$ علاقة تكافؤ على X

(2)

إذا كان $a\in[x], b\in[y]$ فان $a\sim x,\ b\sim y \Leftarrow d(x,a)=0,\ d(y,b)=0$

بما أن $|d(x,y)-d(a,b)|\le d(x,a)+d(y,b) \Leftarrow |d(x,y)-d(a,b)|\le 0$

بما أن القيمة المطلقة غير سالبة فان $|d(x,y)-d(a,b)|=0$

$\Leftarrow d(x,y)-d(a,b)=0 \Leftarrow d(x,y)=d(a,b)$ وعلية d^* معرفة تعريفا حسنا.

بما أن $d(x,y)\ge 0$ لكل $x,y\in X \Leftarrow d^*([x],[y])\ge 0$ لكل $[x],[y]\in A$

ليكن $x,y\in X$

$$d^*([x],[y])=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x\sim y \Leftrightarrow [x]=[y]$$

ليكن $x,y\in X$

$$d^*([x],[y])=d(x,y)=d(y,x)=d^*([x],[y])$$

ليكن $x,y,z\in X$

$$d^*([x],[y])=d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)=d^*([x],[z])+d^*([z],[y])$$

وعلية (A,d^*) فضاء متريا .

مثال(14)

ليكن X تمثل مجموعة كل الدوال الحقيقية على الفترة المغلقة [0,1] والقابلة للتكامل الريماني على تلك الفترة. عرف الدالة $d: X\times X\to R$ بالشكل الأتي:

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

لكل $f,g\in X$ ، فان d دالة شبه متربة وليست متربة على X .

الحل:

استخدام خواص التكامل الريماني نبرهن البديهيات الآتية:

(1)

ليكن $f,g\in X$ $\Leftarrow$ $|f(x)-g(x)|>0$ $\Leftarrow$ $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx>0$

(2)

ليكن $f\in X$

$$d(f,f)=\int_0^1|f(x)-f(x)|dx=\int_0^1|0|dx=0$$

(3)

ليكن $f,g\in X$

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|g(x)-f(x)|dx=d(g,f)$$

(4)

ليكن $f,g,h\in X$

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|dx$$
$$\le\int_0^1(|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)dx=\int_0^1|f(x)-h(x)|dx+\int_0^1|h(x)-g(x)|dx$$
$$=d(f,h)+d(h,g)$$

$\Leftarrow$ d دالة شبه مترية، بقي أن نبرهن على أن d دالة ليست مترية.

نعرف الدالتين $f,g:[0,1]\to R$ بالشكل الأتي:

$$f(x)=\begin{cases}2, & x=0\\ 0, & 0<x\le 1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x\le 1\end{cases}$$

$$f(x)-g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x\le 1\end{cases}$$

$\Leftarrow$ $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=0$ ولكن $f\neq g$.

فضاء حاصل الضرب Product Space

لتكن كل من X,Y مجموعة الضرب الديكارتي(*Cartesian Product*) للمجموعتين Y,X يرمز له بالرمز $X\times Y$ ويعرف كالآتي

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$$

من الواضح أن $X\times Y\neq Y\times X$ وكذلك نلاحظ انه إذا كانت كل من $X\times Y$ مجموعة غير خالية فان $X\times Y$ غير خالية أيضا.

مثال (15)

إذا كان كل من (X,d_1), (Y,d_2) فضاء متريـاً فان $(X\times Y,d)$ يكون فضاء متريـاً حيث

$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}$ لكل $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

الحل:

(1) ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

$$d_1(x_1,x_2)\geq 0,\quad d_2(y_1,y_2)\geq 0 \quad\Leftarrow\quad \max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}\geq 0 \quad\Leftarrow\quad d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\geq 0$$

(2) ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0 \quad\Leftrightarrow\quad \max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}=0 \quad\Leftrightarrow\quad d_1(x_1,x_2)=0,\quad d_2(y_1,y_2)=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x_1=x_2,\quad y_1=y_2 \quad\Leftrightarrow\quad (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

(3) ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}=\max\{d_2(x_1,x_2),d_1(y_1,y_2)\}=d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$$

(4) ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in X\times Y$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}\leq\max\{d_1(x_1,x_3)+d_1(x_3,x_2),d_2(y_1,y_3)+d_2(y_3,y_2)\}$$
$$\leq\max\{d_1(x_1,x_3),d_2(y_1,y_3)\}+\max\{d_1(x_3,x_2),d_2(y_3,y_2)\}=d((x_1,y_1),(x_3,y_3))+d((x_3,y_3),(x_2,y_{23}))$$

الفضاءات الاقليدية Euclidean Spaces

تعريف (16)

ليكن n عددا صحيحا موجبا . المتتابعة المنتهية $(x_1,.....,x_n)$ المكونة من n من الأعداد الحقيقية تسمى n من المركبات (**n-tuples**) . يقال للمجموعة التي عناصرها n من المركبات بالفضاء النوني الاقليدي (**Euclidean n-spaces**) ويرمز له بالرمز R^n وعليه

$$R^n=\{(x_1,x_2,.....,x_n):x_i\in R,i=1,2,.....,n\}$$

ويسمى كل عنصر في R^n نقطة في الفضاء R^n . يعرف الجمع والضرب القياسي على R^n بالصيغة

$$(x_1,....,x_n)+(y_1,....,y_n)=(x_1+y_1,.....,x_n+y_n,\qquad \lambda(x_1,....,x_n)=(\lambda x_1,.....,\lambda x_n)$$

لكل $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$ ولكل $\lambda\in R$

فيما يلي بعض الأمثلة المهمة على الفضاءات الاقليدية.

مثال(17)

لتكن الدالة $d: R^n \times R^n \to R$ معرفة بالصيغة

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

لكل $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)\in R^n$ فأن d تكون دالة مترية على R^n .

الحل:-

(1)

ليكن $x=(x_1,...,x_n), y=(x_1,...,y_n)\in R^n$

$\Leftarrow$ $x_i-y_i\in R$ لكل $i=1,2,...,n$

$\Leftarrow$ $(x_i-y_i)^2\geq 0$ لكل $i=1,2,...n$

$\Leftarrow$ $d(x,y)\geq 0$

(2)

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i.)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x_i-y_i)^2=0 \quad \forall\ i=1,2,...n \Leftrightarrow x_i-y_i=0 \quad \forall\ i=1,2,...n$$

$$\Leftrightarrow x_i=y_i \quad \forall\ i=1,2,...n \quad \Leftrightarrow x=y$$

(3)

ليكن $x=(x_1,...,x_n), y=(x_1,...,y_n)\in R^n$

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=d(y,x)$$

(4)

ليكن $x=(x_1,...,x_n), y=(x_1,...,y_n), z=(z_1,\cdots,z_n)\in R^n$

نضع $\alpha_i=x_i-z, \quad \beta_i=z_i-y_i$