$$d(x,z)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(z,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}((x_i-z_i)+(z_i-y_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام مترا جمة منكوفسكي

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وعليه $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ $\Leftarrow$ d دالة مترية على R^n .

مثال(18)

لتكن الدالة $d:R^n\times R^n\to R$ معرفة بالصيغة

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

لكل $x=(x_1,...,x_n),y=(y_1,...,y_n)\in R^n$ فأن d تكون دالة مترية على R^n .

الحل:-

(1)، (2)، (3) واضحة

(4)

ليكن $x=(x_1,...,x_n),\ y=(x_1,...,y_n),\ z=(z_1,\cdots,z_n)\in R^n$

نضع $\alpha_i=x_i-z,\quad \beta_i=z_i-y_i$

$$\mathrm{d}(x,z)=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\ ,\quad d(z,y)=\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|$$

$$\mathrm{d}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i+\beta_i| \quad\Leftarrow$$

بما أن $|\alpha_i+\beta_i|\le|\alpha_i|+|\beta_i|$ وعليه $d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)$

$\Leftarrow$ d دالة مترية على R^n .

مثال(19)

لتكن الدالة $d:R^n\times R^n\to R$ معرفة بالصيغة

$d(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,...,|x_n-y_n|\}$

لكل $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)\in R^n$ فأن d تكون دالة مترية على R^n .

الحل:-

(1)، (2)، (3) واضحة

(4)

ليكن $x=(x_1,...,x_n),\ y=(x_1,...,y_n),\ z=(z_1,\cdots,z_n)\in R^n$

نضع $\alpha_i+\beta_i=x_i-y_i \quad \Leftarrow \quad \alpha_i=x_i-z,\quad \beta_i=z_i-y_i$

$d(x,z)=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,...,|\alpha_n|\}$

$d(z,y)=\max\{|\beta_1|,|\beta_2|,...,|\beta_n|\}$

$d(x,y)=\max\{|\alpha_1+\beta_1|,|\alpha_2+\beta_2|,...,|\alpha_n+\beta_n|\}$

بما أن $|\alpha_i+\beta_i| \le |\alpha_i|+|\beta_i|$ لكل $i=1,2,...,n$

$$d(x,y)\le\max\{|\alpha_1|+|\beta_2|,|\alpha_2|+|\beta_2|,...,|\alpha_n|+|\beta_n|\}\le\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,...,|\alpha_n|\}+\max\{|\beta_1|,|\beta_2|,...,|\beta_n|\}=d(x,z)+d(z,y)$$

$\Leftarrow$ d دالة مترية على R^n .

تمارين

(1) ليكن (X,d) فضاءً متريا .ولتكن الدالة $d^*:X\times X\to R$ معرفة بالصيغة

$$d^*(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

لكل $x,y\in X$.برهن على أن d^* دالة مترية على X، وان (X,d^*) فضاءً متريا مقيدا.

(2) ليكن (X,d) فضاءً متريا .ولتكن الدالة $d^*:X\times X\to R$ معرفة بالصيغة

$$d^*(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$$

لكل $x,y\in X$.برهن على أن d^* دالة مترية على X .

المصادر

[1] عادل غسان نعوم،"**مقدمة في التحليل الرياضي**"، جامعة بغداد – العراق 1986.

[2] **Apostol,** " Mathematical Analysis"**,2 nd, 1974**

[3] **Ash, R. B.,** " Real Analysis And Probability"**, 1972.**

[4] **Billingsley, P.,** " Probability And Measure " **, 1979-1986.**

[5] **Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.,**" Real Variables" **, 1969.**

[6] **Edwin Hewitt Karl Stromberg,** " Real And Abstract Analysis" **, 1978**

[7] **Folland . G. B.,**" Real Analysis"**,2 nd, 1999**

[8] **Goldberg, R. R.,**" Methods Of Real Analysis"**,1979.**

[9] **Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.,**" Introductory Real Analysis",**1970.**

[10] **Royden, H. L.,**" Real Analysis",**1988**

[11] **Rudin, W.,** " Principles Of Mathematical Analysis",**1953**

[12] **Rudin, W.,** " Real And Complex Analysis",**19**

[13] **Ruel V. Churchill James W. Brown Roger F. Verhey,**" Complex Variables And Applications",**3 rd, 1974.**

[14] **Scott, D. B., And Tims, S. R.,**" Mathematical Analysis An Introduction",**1966.**

[15] **Sharma, J. N And Vasishtha, A. R.,**" Real Analysis",**5 th, 1977.**

[16] **Walter Rudin,**" Principles Of Mathematical Analysis",**2 nd, 1964.**

[17] **Walter Rudin,**" Real And Complex Analysis",**2 nd, 1974.**

[18] **Walter Rudin,**" Principles Of Mathematical Analysis",**3 rd, 1986.**

محاضرات
الأستاذ المساعد الدكتور نوري فرحان المياحي
قسم الرياضيات – كلية علوم الحاسوب والرياضيات – جامعة القادسية – العراق

ر331
التحليل الرياضي (1) Mathematical Analysis I

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

المحاضرة الخامسة

التبولوجيات المترية Metric topologies

تعريف (1)

ليكن (X,d) فضاءً متريا، $x_0 \in X$ وليكن r عدد حقيقي موجب. المجموعة $\{x \in X : d(x,x_0) < r\}$

تسمى كرة مفتوحة (**Open Ball**) في X ويسمى x_0 مركزة الكرة و r نصف قطر الكرة ويرمز لها بالرمز $\beta_r(x_0)$ وعليه

$$\beta_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$

والكرة المغلقة (**Closed Ball**) التي مركزها النقطة x_0 ونصف قطرها r يرمز لها بالرمز $\overline{\beta_r}(x_0)$ وتعرف بالصيغة

$$\overline{\beta}_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) \le r\}$$

ملاحظة

كل من $\beta_r(x_0), \overline{\beta_r}(x_0)$ مجموعة غير خالية لان كلا منها تحتوي على المركز، أي أن $x_0 \in \beta_r(x_0)$ وكذلك $x_0 \in \overline{\beta}_r(x_0)$

مثال(2)

في الفضاء المتري الاعتيادي (R,d_u)

(1) كل كرة مفتوحة فيه تكون فترة مفتوحة وبالعكس

(2) كل كرة مغلقة فيه تكون فترة مغلقة وبالعكس

الحل:-

$$d(x,y) = |x-y| \qquad \forall x,y \in R$$

(1)

لتكن $x_0 \in R$ و $r > 0$

$$\beta_r(x_0)=\{x\in R: d(x,x_0)<r\}=\{x\in R:|x-x_0|<r\}=\{x\in R:-r<x-x_0<r\}=\{x\in R: x_0-r<x<x_0+r\}=(x_0-r,x_0+r)$$

الآن نأخذ العكس. لتكن $\mathrm{A}=(a,b)$ فترة مفتوحة في R $\Leftarrow \mathrm{A}$.

نضع $x_0=\dfrac{a+b}{2}$, $r=\dfrac{b-a}{2}\Leftarrow r>0$

$$x_0-r=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a,\quad x_0+\gamma=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=b$$

$$\mathrm{A}=(a,b)=(x_0-r,x_0+r)=\beta_r(x_0)$$

وبالمثل نبرهن **(2)**

مثال(3)

ليكن $\mathrm{X}=[0,1]$ ولتكن الدالة $d:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to R$ معرفة بالصيغة

$$d(x,y)=|x-y|$$

لكل $x,y\in \mathrm{X}$. ناقش $\mathrm{B}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ، $\mathrm{B}_{\frac{1}{4}}(0)$

$$\mathrm{B}_1\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{x\in \mathrm{X}: d\left(x,\frac{1}{2}\right)<1\right\}=\left\{x\in \mathrm{X}:|x-\frac{1}{2}|<1\right\}=\left\{x\in \mathrm{X}:-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}=\{x\in \mathrm{X}:0\le x\le|\}=\mathrm{X}$$

$$\mathrm{B}_{\frac{1}{4}}(0)=\left\{x\in \mathrm{X}: d(x,0)<\frac{1}{4}\right\}=\left\{x\in \mathrm{X}:|x-0|<\frac{1}{4}\right\}=\left\{x\in \mathrm{X}:-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}\right\}=\left[0,\frac{1}{4}\right)$$

مثال(4)

ناقش الكرات المفتوحة التي مركزها النقطة (0,0)ونصف قطرها 1 لكل من الدوال المترية التالية والمعرفة على R^2

(1) $d_1(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ لكل $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in R^2$

(2) $d_2(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ لكل $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in R^2$

(3) $d_3(x,y)=\max\{x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$ لكل $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in R^2$

الحل:-

$r=1,\quad x_0=(0,0)$

(1)

$$\beta_r(x_0)=\{x\in \mathrm{X}: d(x,x_0)<r\}=\{(x_1,x_2)\in R^2 : {x_1}^2+{x_2}^2<1\}$$

(2)

$$\beta_r(x_0)=\{x\in \mathrm{X}: d(x,x_0)<r\}=\{(x_1,x_2)\in R^2 :|x_1|+|x_2|<1\}$$

(3)

$$\beta_r(x_0)=\{x\in \mathrm{X}: d(x,x_0)<r\}=\{(x,x_2)\in R^2 =\max\{|x_1|,|x_2|\}<1\}$$

وهذه المنطقة تكون محدودة بالمستقيمات $x_1=1$ ، $x_1=-1$ ، $x_2=1$ ، $x_2=-1$

مثال(5)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر وليكن $x_0\in \mathrm{X}$ وان r عدد حقيقي موجب

(ا) إذا كان $r>1$ فان $\mathrm{B}_r(x_0)=X$

(ب) إذا كان $r\le 1$ فان $\mathrm{B}_r(x_0)=\{x_0\}$

الحل:-

(ا)

ليكن $x\in \mathrm{X}$ ، بما أن $d(x,x_0)=\begin{cases}0, & x=x_0\\ 1, & x\neq x_0\end{cases} \Leftarrow d(x,x_0)<r$

$$\Leftarrow d(x,x_0)<r \Leftarrow x\in \mathrm{B}_r(x_0) \Leftarrow \mathrm{X}\subseteq \mathrm{B}_r(x_0) \text{ ولكن } \mathrm{B}_r(x_0)\subseteq \mathrm{X} \Leftarrow \mathrm{B}_r(x_0)=\mathrm{X}\ .$$

(ب)

ليكن $x\in \mathrm{X}$ بحيث $x\neq x_0 \Leftarrow d(x,x_0)=1 \Leftarrow d(x,x_0)\ge r \Leftarrow x\notin \mathrm{B}_r(x_0)$ لكل $x\neq x_0$

بما أن $x_0\in \mathrm{B}_r(x_0)$ (لأنها مركز الكرة) $\Leftarrow \mathrm{B}_r(x_0)=\{x_0\}$.

تعريف (6)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن A بأنها مجموعة مفتوحة (**Open Set**) في X إذا كان لكل $x\in A$ يوجد $r>0$ بحيث أن $\mathrm{B}_r(x)\subset \mathrm{A}$. بعبارة أخرى المجوعة A تكون مفتوحة إذا كان لكل $x\in \mathrm{A}$ يوجد $r>0$ يحقق الشرط الآتي :

أذا كان $y\in X$ وكان $d(x,y)<r$ فان $y\in A$

ويقال A بأنها مجموعة مغلقة (**Closed Set**) في X إذا كانت A^c مجموعة مفتوحة في X

مبرهنة (7)

في أي فضاء متري
(1) كل كرة مفتوحة تكون مجموعة مفتوحة
(2) كل كرة مغلقة تكون مجموعة مغلقة

البرهان

ليكن (X,d) فضاء متري وليكن $x_0 \in X$ ، $r>0$

(1)

يجب أن نبرهن $B_r(x_0)$ مجموعة مفتوحة

لتكن $x \in B_r(x_0) \Leftarrow d(x,x_0)<r \Leftarrow r--d(x,x_0)>0$

نضع $r_1 = r-d(x,x_0) \Leftarrow r_1>0$. يجب أن نبرهن $B_{r_1}(x) \subseteq B_r(x_0)$

ليكن $y \in B_{r_1}(x) \Leftarrow d(y.x)<r_1 \Leftarrow d(y,x)<r-d(x,x_0) \Leftarrow$

$d(y,x)+d(x,x_0)<r$

بما أن $d(y,x_0)\le d(y,x)+d(x,x_0) \Leftarrow d(y,x_0)<r \Leftarrow y \in B_r(x_0)$

وعليه $B_r(x_0)$ مجموعة مفتوحة

(2)

يجب أن نبرهن $\overline{B}_r(x_0)$ مجموعة مغلقة. لتكن $A = (\overline{B}_r(x_0))^c$

بما أن $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) \le r\} \Leftarrow A = \{x \in X : d(x,x_0) > r\}$

ليكن $x \in A \Leftarrow d(x,x_0)>r$. نضع $r_2 = d(x,x_0)-r \Leftarrow r_2>0$

يجب أن نبرهن $B_{r_2}(x) \subset A$.

ليكن $y \in B_{r_2}(x) \Leftarrow d(y,x)<r_2 \Leftarrow d(y,x)<d(x,x_0)-r \Leftarrow$

$d(x,x_0)-d(y,x)>r \Leftarrow$

بما أن $d(x,x_0)\le d(x,y)+d(y,x_0) \Leftarrow d(x,x_0)-d(y,x)\le d(y,x_0)$

$B_{r_2}(x) \subset A \Leftarrow y \in A \Leftarrow d(y,x_0)>r \Leftarrow$

$A \Leftarrow$ مجموعة مفتوحة وعليه $A^c = \overline{B}_r(x_0)$ مجموعة مغلقة .

نتيجة (8)

في الفضاء المتري الاعتيادي (R,d_u)
(1) كل فترة مفتوحة تكون مجموعة مغلقة
(2) كل فترة مغلقة تكون مجموعة مغلقة

مبرهنة(9)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A \subseteq X$ فان المجموعة A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت A تساوي اتحاد كرات مفتوحة .

البرهان :-

إذا كانت $A = \phi$ ينتهي البرهان . أما إذا كانت $A \neq \phi$

نفرض A مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ لكل $x \in A$ يوجد $r_x > 0$ بحيث أن $B_{r_x}(x) \subseteq A$

$\Leftarrow$ $A \Leftarrow A = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}(x) \Leftarrow A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_{r_x}(x) \subset A$ تساوي اتحاد كرات مفتوحة

الاتجاه المعاكس: نفرض أن A تساوي اتحاد كرات مفتوحة

بما أن كل كرة مفتوحة تكون مجموعة مفتوحة $\Leftarrow A$ تساوي اتحاد مجموعات مفتوحة وعليه A مجموعة مفتوحة .

مثال(10)

برهن على أن كل مجموعة جزئية في فضاء متري مبعثر تكون مفتوحة ومغلقة .

الحل :-

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن $A \subseteq X$

إذا كانت $A = \phi$ ينتهي البرهان . أما إذا كانت $A \neq \phi$. نفرض $x \in A$

نأخذ $r = \frac{1}{2}$

$$B_r(x) = \{y \in X : d(y,x) < \frac{1}{2}\} = \{y \in X : d(y,x) = 0\} = \{y \in X : y = x\} = \{x\} \subset A$$

$\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة

لتكن $B \subseteq X$ $\Leftarrow$ $B^c \subseteq X$ $\Leftarrow$ B^c مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ B مجموعة مغلقة في X

مبرهنة (11)

ليكن (X,d) فضاء متريا

(1) كل من X, ϕ مجموعة مفتوحة في X

(2) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجوعات مفتوحة في X فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ تكون مجموعة مفتوحة X .

(3) إذا كانت A_λ ،لكل $\lambda \in \Lambda$ مجموعة مفتوحة في X فان $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ تكون مجموعة مفتوحة في X .

البرهان:

(1)

نفرض أن ϕ مجموعة غير مفتوحة $\Leftarrow$ يوجد $x \in \phi$ بحيث $\beta_r(x) \subseteq \phi$ لكل $r > 0$. وهذا غير ممكن لان ϕ لاتحتوي على عناصر. $\Leftarrow$ ϕ مجموعة مفتوحة

بما أن $r > 0, \quad x \in X$ لكل $\beta_r(x) \subseteq X \quad \Leftarrow \quad X$ مجموعة مفتوحة.

(2)

لتكن كل من $A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعة مفتوحة في X . وليكن $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

$\Leftarrow x \in A_i$ لكل $i = 1,2,...,n$

بما أن A_i مجموعة مفتوحة في X لكل $i = 1,2,...,n$

$\Leftarrow$ يوجد $r_i > 0$ لكل $i = 1,2,...,n$ بحيث أن $B_{r_i}(x) \subset A_i$ لكل $i = 1,2,...,n$

نضع $r = \min\{r_1, r_2, ..., r_n\} \Leftarrow B_r(x) \subset \beta_{r_i}(x)$ لكل $i = 1,2,...,n$

$\beta_r(x) \subset A_i \Leftarrow B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad \Leftarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ مجموعة مفتوحة في X

(3)

لتكن A_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda \in \wedge$ وليكن $x \in \bigcup_{\lambda \in \wedge} A_\lambda$

$\Leftarrow x \in A_\lambda$ لبعض قيم $\lambda \in \wedge$

بما أن A_λ مجموعة مفتوحة في $X \quad \Leftarrow$ يوجد $r > 0$ بحيث أن $B_r(x) \subset A_\lambda$

$\Leftarrow B_r(x) \subset \bigcup_{\lambda \in \wedge} A_\lambda \quad \Leftarrow \bigcup_{\lambda \in \wedge} A_\lambda$ مجموعة مفتوحة في X.

ملاحظة

في أي فضاء متري ليس من الضروري أن يكون تقاطع أي عدد غير منتهي من المجموعات المفتوحة مجموعة مفتوحة. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال(12)

ليكن (R, d_u) فضاء متري اعتيادي ولتكن $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ لكل $n \in Z^+$ نلاحظ أن A_n مجموعة مفتوحة لكل $n \in Z^+$ وان $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ مجموعة غير مفتوحة.

مبرهنة (13)

ليكن (X, d) فضاء متريا

(1) كل من X, ϕ مجموعة مغلقة في X

(2) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجوعات مغلقة في X فإن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ تكون مجموعة مغلقة X.

(3) إذا كانت A_λ ،لكل $\lambda \in \Lambda$ مجموعة مغلقة في X فان $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ تكون مجموعة مغلقة في X.

البرهان:

(1)

بما أن $\phi^c = X$ ، وان X مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ ϕ^c مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ ϕ مجموعة مغلقة في X

بما أن $X^c = \phi$ ، وان ϕ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ X^c مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ X مجموعة مغلقة في X

(2)

لتكن كل من $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$ مجموعة مغلقة في X .

$\Leftarrow$ A_i^c مجموعة مفتوحة في X لكل $i = 1,2,...,n$

$\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i^c$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i^c)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$ مجموعة مغلقة في X

(3)

لتكن A_λ مجموعة مغلقة في X لكل $\lambda \in \wedge$ وليكن $x \in \bigcup_{\lambda\in\wedge} \mathrm{A}_\lambda$

$\Leftarrow$ A_λ^c مجموعة مفتوحة في X لكل قيم $\lambda \in \wedge$

$\Leftarrow$ $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c)^c = \bigcap_{\lambda\in} A_\lambda$ مجموعة مغلقة في X

ملاحظة

في أي فضاء متري ليس من الضروري أن يكون اتحاد أي عدد غير منتهي من المجموعات المغلقة مجموعة مغلقة. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال(14)

ليكن (R,d_u) فضاء متري اعتيادي ولتكن $A_n=[\frac{1}{n},1)$ لكل $n\in Z^+$ نلاحظ أن A_n مجموعة مغلقة لكل $n\in Z^+$ وان $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1]$ مجموعة غير مغلقة.

مبرهنة (15)

في أي فضاء متري (X,d) تكون كل مجموعة أحادية مغلقة وعليه كل مجموعة منتهية تكون مغلقة .

البرهان :-

لتكن A مجموعة أحادية . نفرض $A=\{a\}$. يجب أن نبرهن A مغلقة .

ليكن $x\in A^c \Leftarrow x\neq a \Leftarrow d(a,x)>0$

نضع $r=d(a,x) \Leftarrow r>0$

بما أن $d(a,x)\geq r \Leftarrow a\notin B_r(x) \Leftarrow B_r(x)\cap A=\phi \Leftarrow B_r(x)\subset A^c \Leftarrow A^c$ مجموعة مفتوحة $\Leftarrow A$ مجموعة مغلقة .

الآن نبرهن كل مجموعة منتهية تكون مغلقة . لتكن B مجموعة جزئية منتهية من X إذا كانت $B=\phi$ ينتهي البرهان ، أما إذا كانت $B\neq\phi$ ، نفرض $B=\{b_1,...,b_n\}$ بما أن $\{b_i\}$ مغلقة لكل $i=1,2,...,n \Leftarrow B=\bigcup_{i=1}^{n}\{b_i\}$ مجموعة مغلقة في X .

مبرهنة (16)

ليكن (X,d) فضاءً متريا ، $x_0\in X$ ولتكن $A\subset X$

(1) $x_o\in A'$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الأتي :-

لكل كرة مفتوحة مركزها x_o تحتوي على عدد غير منته من نقاط A

(2) إذا كانت المجموعة A منتهية فان $A'=\phi$

(3) $d(x_o,A)=0$ إذا وفقط إذا كانت $x_o\in A$ أو $x_o\in A'$

(4) $\overline{A}=\{x\in X : d(x,A)=0\}$

البرهان:

(1) نفرض الشرط متحقق $\Leftarrow$ لكل $r\rangle 0$ فان $B_r(x)$ تحتوي على عدد غير منتهي من نقاط $A \Leftarrow x\in A'$ (حسب التعريف)

الاتجاه المعاكس

سنبرهن بطريقة التناقض . نفرض يوجد $r\rangle 0$ بحيث أن $B_r(x)$ تحتوي على عدد منتهي من نقاط A والتي تختلف عن x ولتكن هذه النقاط هي $x_1,...,x_n$ أي أن $A\cap B_r(x)=\{x_1,...,x_n\}$

نضع $r_1 = \min\{d(x,x_i) : i = 1,2,...,n\} \Leftarrow r_1 > 0$ لأنه العنصر الأصغر لمجموعة منتهية من الأعداد الموجبة $\Leftarrow B_{r_1}(x)$ لاتحتوي أي نقطة من نقاط A تختلف عن $x \Leftarrow x \notin A'$ وهذا تناقض

(2)

(3)نفرض $d(x_o,A) = 0$ ولتكن $x_o \notin A$ بما أن $d(x_o,A) = \inf\{d(x_o,x) : x \in A\} = 0$ ليكن V جوار إلى النقطة $x_o \Leftarrow$ يوجد $r > 0$ بحيث أن $B_r(x_o) \subset V$ حسب تعريف (inf) يوجد $y_o \in A$ بحيث أن $d(x_o,y_o) \langle d(x_oA) + r$ مبرهنة **(6.1.)**

بما أن $d(x_o,A) = 0 \Leftarrow d(x_o,y_o) \langle r \Leftarrow y_o \in B_r(x_o) \Leftarrow y_o \in A \cap V$ بما ان

$x_o \in A' \Leftarrow A \cap (V \setminus \{x_o\}) \neq \phi \Leftarrow x_o \notin A$

الاتجاه المعاكس

نفرض إن $x_o \in A$ أو $x_o \in A'$ إذا كانت $x_o \in A \Leftarrow d(x_o,A)$

أما إذا كانت $x_o \notin A$ أو $x_o \in A' \Leftarrow$ لكل جوار V إلى X فان $A \cap (V \setminus \{x\}) = \phi \Leftarrow$ لكل $r \rangle 0$ فان $A \cap (B_r(x_o) \setminus x_o) \neq \phi \Leftarrow$ لكل $r \rangle 0$ يوجد $x_o \in A$ بحيث أن

$d(x_o,A) = 0 \Leftarrow \inf\{d(x_o,x) : x \in A\} = 0 \Leftarrow 0 \leq d(x_o,x) \langle r$

(4)بما أن $\overline{A} = A \cup A' \Leftarrow x \in \overline{A}$ إذا وفقط إذا كان $d(x,A) = 0$ (حسب 3)

$\Leftarrow \overline{A} = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$

تعريف (17)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A \subseteq X$. يقال عن النقطة $x \in A$ بأنها نقطة داخلية **(Interior point)** في A إذا وجدت مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x \in G \subset A$، بعبارة أخرى إذا وجد $r > 0$ بحيث أن $\beta_r(x) \subseteq A$. مجموعة كل النقاط الداخلية في A تسمى داخل(**Interior**) المجموعة A **(** ويرمز لها بالرمز A° أو $\text{int}(A)$ أي أن

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0 \quad with \quad \beta_r(x) \subseteq A\}$$

وعليه $A^\circ \subset A$. ومن التعريف مباشرة نستنتج

(1) A° مجموعة مفتوحة في X.

(2) مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا كان $A^\circ = A$.

(3) $(A^0)^0 = A^0$.

(4) A° تساوي اتحاد جميع المجموعات المفتوحة في X والمحتواة في A، أي أن وعليه A° تكون اكبر مجموعة مفتوحة في X ومحتواة في A.

مثال(18)

لتكن (X,d) فضاء متري متماسك ولتكن $A \subseteq X$. احسب A^0 .

الحل

بما أن (X,d) فضاء متري متماسك $\Leftarrow$ $d(x,y)=0$ لكل $x,y \in X$

$$A^{\circ} = \begin{cases} \phi & , \quad A \neq X \\ X & , \quad A = X \end{cases}$$

مثال (19)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن $A \subseteq X$. احسب A^0 .

الحل

بما أن (X,d) فضاء متري مبعثر $\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة في X وعليه $A^{\circ} = A$.

مثال(20)

لتكن (R,d_u) فضاء متري اعتيادي ولتكن $A \subseteq R$.

(1) إذا كانت $A=(a,b)$ فان $A^{\circ}=(a,b)$

(2) إذا كانت $A=(a,b]$ فان $A^{\circ}=(a,b)$

(3) إذا كانت $A=[a,b)$ فان $A^{\circ}=(a,b)$

(4) إذا كانت $A=[a,b]$ فان $A^{\circ}=(a,b)$

(5) إذا كانت $A=[a,b]\cup\{c,d\}$ فان $A^{\circ}=(a,b)$

(6) إذا كانت A منتهية فان $A^{\circ}=\phi$

(7) إذا كانت $A=N$ فان $A^{\circ}=\phi$ حيث N تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية.

(8) إذا كانت $A=Z$ فان $A^{\circ}=\phi$ حيث Z تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.

(9) إذا كانت $A=Q$ فان $A^{\circ}=\phi$ ِحيث Q تمثل مجموعة الأعداد النسبية

(10) إذا كانت $A=\{\frac{1}{n}: n \in N\}$ فان $A^{\circ}=\phi$

مبرهنة (21)

ليكن (X,d) فضاء متريا وليكن $A,B \subseteq X$

(1) إذا كانت $A \subseteq B$ فان $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$

(2) $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$

(3) $(A \cup B)^{\circ} \supset A^{\circ} \cup B^{\circ}$

البرهان

(1)

ليكن $x\in A^{\circ} \Leftarrow$ توجد $r>0$ بحيث أن $\beta_r(x)\subseteq A$

بما أن $A\subseteq B \Leftarrow \beta_r(x)\subseteq B \Leftarrow x\in B^{\circ} \Leftarrow A^{\circ}\subset B^{\circ}$

(2)

بما أن $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$

$$(A\cap B)^{\circ}\subset A^{\circ}\cap B^{\circ} \Leftarrow (A\cap B)^{\circ}\subset B^{\circ},\quad (A\cap B)^{\circ}\subset A^{\circ} \Leftarrow$$

الاتجاه الأخر : نفرض $x\in A^{\circ}\cap B^{\circ} \Leftarrow x\in A^{\circ}, x\in B^{\circ}$

$\Leftarrow$ توجد $r_1>0, r_2>0$ بحيث أن $\beta_{r_1}(x)\subseteq A,\quad \beta_{r_2}(x)\subseteq B$

نضع $r=\min\{r_1,r_2\}$

$$\beta_r(x)\subseteq A\cap B \Leftarrow \beta_r(x)\subseteq A,\quad \beta_r(x)\subseteq B \Leftarrow$$

$$(A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ} \text{ وعليه } A^{\circ}\cap B^{\circ}\subset (A\cap B)^{\circ} \Leftarrow x\in (A\cap B)^{\circ} \Leftarrow$$

(3)

بما أن $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$

$$B^{\circ}\subset (A\cup B)^{\circ}, A^{\circ}\subset (A\cup B)^{\circ} \Leftarrow$$

$$A^{\circ}\cup B^{\circ}\subset (A\cup B)^{\circ} \Leftarrow$$

ملاحظة

ليس بالضروري أن يكون $(A\cup B)^{\circ}=A^{\circ}\cup B^{\circ}$ والمثال الأتي يوضح ذلك .

ليكن (R,d_u) فضاء متريا اعتياديا ولتكن $A=[0,1], B=[1,2]$ نلاحظ أن

$$1\notin A^{\circ}\cup B^{\circ} \Leftarrow 1\notin B^{\circ}, 1\notin A^{\circ} \Leftarrow B^{\circ}=(1,2), A^{\circ}=(0,1)$$

ولكن $A\cup B=[0,2] \Leftarrow (A\cup B)^{\circ}=(0,2)$ وان $1\in (A\cup B)^{\circ}$ وعليه $(A\cup B)^{\circ}\neq A^{\circ}\cup B^{\circ}$

تعريف (22)

ليكن (X,τ) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة ملاصقة (**Adherent Point**) أو نقطة انغلاق (**Closure Point**) أو نقطة اتصال (**Contact point**) إلى المجموعة A إذا كان لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $d(x,y)<r$. المجموعة التي ناصرها جميع نقاط الانغلاق للمجموعة A تسمى انغلاق (**Closure**) المجموعة A ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$

$$\overline{A}=\{x\in X : \forall r>0, \exists y\in A \ni d(x,y)<r\}$$

وعليه $A\subset \overline{A}$. ومن التعريف مباشرة نستنتج.

(1) $\overline{A}$ مجموعة مغلقة في X .

(2) A مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كان $\overline{A}=A$.