(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(4) $\overline{A}$ تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة في X والتي تحتوي على A ، أي أن

$\overline{A} = \cap\{F \subseteq X : A \subset F$ بحيث X مجموعة مغلقة في $F\}$

وعليه $\overline{A}$ تكون اصغر مجموعة مغلقة في X وتحتوي على A.

مثال (23)

ليكن (X,d) فضاء متريا متماسكا ولتكن $A \subseteq X$. احسب $\overline{A}$.

الحل

بما أن (X,d) فضاء متريا متماسكا $\Leftarrow d(x,y) = 0$ لكل $x, y \in X$ فان

$$\overline{A} = \begin{cases} \phi & A = \phi \\ X & A \neq \phi \end{cases}$$

مثال(24)

ليكن (X,d) فضاء متريا مبعثرا ولتكن $A \subseteq X$. احسب $\overline{A}$.

الحل

بما أن (X,d) فضاء متريا مبعثر $\Leftarrow A$ مغلقة $\Leftarrow \overline{A} = A$.

مثال(25)

ليكن (R,d_u) فضاء متربا اعتياديا ولتكن $A \subseteq R$

(1) إذا كانت $A = (a,b)$ فان $\overline{A} = [a,b]$

(2) إذا كانت $A = (a,b]$ فان $\overline{A} = [a,b]$

(3) إذا كانت $A = [a,b)$ فان $\overline{A} = [a,b]$

(4) إذا كانت $A = [a,b]$ فان $\overline{A} = [a,b]$

(5) إذا كانت $A = N$ فان $\overline{A} = N$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية.

(6) إذا كانت $A = Z$ فان $\overline{A} = Z$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

(7) إذا كانت $A = Q$ فان $\overline{A} = \Re$ حيث Q مجموعة الأعداد النسبية

(8) إذا كانت $A = \{\frac{1}{n} : n \in N\}$ فان $\overline{A} = A \cup \{0\}$

(9) $A = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, ...\}$ فان $\overline{A} = A \cup \{1\}$.

مبرهنة (26)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A, B \subseteq X$.

(1) إذا كانت $A \subset B$ فان $\overline{A} \subset \overline{B}$.

$\overline{(A\cap B)}\subset \overline{A}\cap\overline{B}$ (2)

$\overline{(A\cup B)}\subset \overline{A}\cup\overline{B}$ (3)

البرهان

(1)

ليكن $x\in\overline{A}\Leftarrow$ لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $d(x,y)<r$

بما أن $A\subset B\Leftarrow y\in B$ $\Leftarrow$ لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $d(x,y)<r$

$\Leftarrow x\in\overline{B}$ وعليه $\overline{A}\subset\overline{B}$.

برهان آخر

بما ن $A\subset B$, $B\subset\overline{B}$ $\Leftarrow$ $A\subset\overline{B}$

$\overline{B}$ مجموعة مغلقة وتحتوي على $\boldsymbol{A}$.

ولكن $\overline{A}$ اصغر مجموعة مغلقة تحتوي على A

$\Leftarrow \overline{A}\subset\overline{B}$.

(2)

بما أن $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$

$\Leftarrow \overline{A\cap B}\subset\overline{A}$, $\overline{A\cap B}\subset\overline{B}$

$\Leftarrow \overline{A\cap B}\subset\overline{A\cap B}$

(3)

بما أن $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$

$\Leftarrow \overline{A}\subset\overline{A\cup B}$, $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$

$\Leftarrow \overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{(A\cup B)}$

بما أن كل من $\overline{A},\overline{B}\Leftarrow$ مجموعة مغلقة $\overline{A}\cup\overline{B}$ مجموعة مغلقة

وكذلك بما أن $A\subset\overline{A}, B\subset\overline{B}\Leftarrow A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$

$\Leftarrow\overline{A}\cup\overline{B}$ مجموعة مغلقة وتحتوي على $A\cup B$

ولكن $\overline{(A\cup B)}$ أصغر مجموعة مغلقة وتحتوي على $A\cup B$

$\overline{(A\cup B)}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$ وعليه $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

ملاحظـــــة

ليس من الضروري أن يكون $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ والمثال الأتي يوضح ذلك

ليكن (R,d_u) فضاء متريا اعتياديا ولتكن $A=(0,1), B=(1,2)$

$\Leftarrow \overline{B}=[1,2],\ \overline{A}=[0,1]\Leftarrow \overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$

ولكن $A\cap B=\phi\Leftarrow \overline{A\cap B}=\phi$ وعليه $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$

تعريف (27)

ليكن (X,τ) فضاء متريا وليكن $A,B\subseteq X$. يقال عن المجموعة **A** بأنها كثيفة (**Dense**) في B إذا كان $B\subset \overline{A}$. وبصورة خاصة يقال عن المجموعة **A** بأنها كثيفة في X (أو تسمى أحيانا **Every Where Dense**) إذا كانت $\overline{A}=X$.

تعريف (28)

ليكن (X,τ) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن المجموعة A بأنها متناثرة (**Nowhere Dense**) (أو تسمى مجموعة مخلخلة **Rare set**) في X إذا كان $\left(\overline{A}\right)^{\circ}=\phi$. يقال عن المجموعة A بأنها نحيلة (**Meager**) (أو مجموعة واهنة **First Category set**) إذا كانت A تساوي اتحاد عائلة قابلة للعد من المجموعات المتناثرة في X ، بعبارة أخرى إذا كانت $A=\cup A_t$ حيث $\{A_t\}$ عائلة قابلة للعد من المجموعات المتناثرة في X .ويقال عن المجموعة A بأنها غير نحيلة (**Non meager**) (أو مجموعة متينة **Second Category set**) إذا لم تكن A واهنـــة .

مثال (29)

ليكن (R,d_u) فضاء متري اعتيادي ولتكن $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in N\right\}$ نلاحظ على أن

A متناثرة $\Leftarrow \left(\overline{A}\right)^{\circ}=\phi\Leftarrow \overline{A}=A\cup\{0\}$.

تعريف(30)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$.يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة غاية (**Limit point**) أو (نقطة تراكم **Aecumulation point**) أو (نقطة ملاصقة **Cluster point**) إلى المجموعة A إذا كان لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $y\neq x$ و $d(x,y)<r$. مجموعة كل نقاط الغاية إلى المجموعة A تسمى بمشتقة (**Derived**) المجموعة A ويرمز لها بالرمز A' .

$$A'=\{x\in X:\ \forall r>0,\exists y\in A\ \ni\ y\neq x,\ \ d(x,y)<r\}$$

يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة منعزلة (**Isolated Point**) إلى المجموعة A إذا كانت $x\in A$, $x\notin A'$ ويقال عن A بأنها مجموعة منعزلة (**Isolated Set**) إذا كان $A\cap A'=\phi$. يقال عن المجموعة A بأنها مجموعة تامة (**Perfect Set**) إذا كانت $A=A'$. ويقال عن المجموعة A بأنها كثيفة بنفسها (**Dense in Itself**) إذا كانت $A\subset A'$.

مبرهنة (31)

ليكن (X,d)فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$

(1)إذا كانت $A=\phi$ فان $A'=\phi$

(2) إذا كانت $x\in A'$ فان $x\in (A\,|\,\{x\})'$

(3) $A' \subset \overline{A}$
(4) $\overline{A} = A \cup A'$
(5) إذا كانت $A' = \phi$ فان المجموعة A تكون مغلقة في X.
(6) المجموعة A تكون مغلقة في X إذا وفقط إذا كانت $A' \subset A$

البرهان:

(1)

بما أن $\phi \cap (V \mid \{x\}) = \phi$ لكل $x \in X$ ولكل جوار V إلى $x \Leftarrow \phi' = \phi$

(2)

بما أن $x \in A' \Leftarrow$ لكل جوار V إلى x فان $A \cap (V \mid \{x\}) \neq \phi$

$$(A \mid \{x\}) \cap (V \mid \{x\}) = (A \cap \{x\}^c) \cap (V \cap \{x\}) = A \cap (V \cap \{x\}^c) = A \cap (V \mid \{x\}) = \phi$$

$$\Leftarrow x \in (A \mid \{x\})'$$

(3)

لتكن $x \in A' \Leftarrow$ لكل $r > 0$ يوجد $y \in A$ بحيث أن $y \neq x$ و $d(x,y) < r$
$\Leftarrow$ لكل $r > 0$ يوجد $y \in A$ بحيث أن $y \neq x$ و $d(x,y) < r \Leftarrow$
$x \in \overline{A} \Leftarrow A' \subset \overline{A}$

(4)

بما أن $A' \subset \overline{A} \Leftarrow A \cup A' \subset A \cup \overline{A}$
ولكن $A \cup \overline{A} = \overline{A}$ لأن $A \subset \overline{A}$
$\Leftarrow A \cup A' \subset \overline{A}$

الاتجاه الآخر

نفرض $x \in \overline{A}$ هناك احتمالات

(ا) إذا كان $x \in A \Leftarrow x \in A \cup A' \Leftarrow \overline{A} \subset A \cup \overline{A}$

(ب) إذا كانت $x \notin A$

بما أن $x \in \overline{A} \Leftarrow$ لكل $r > 0$ يوجد $y \in A$ بحيث أن $y \neq x$ و $d(x,y) < r$ لكل جوار V إلى x فان $A \cap V \neq \phi$

بما أن $x \notin A \Leftarrow$ لكل جوار V إلى x فان $A \cap (V \mid \{x\}) \neq \phi$

$\Leftarrow x \in A' \Leftarrow x \in A \cup A' \Leftarrow \overline{A} \subset A \cup A$

وعليه $\overline{A} = A \cup A'$

(5)

بما أن $\overline{A} = A \cup A' \Leftarrow \overline{A} = A \cup \phi = A \Leftarrow A$ مغلقة

(6)

لتكن A مجموعة مغلقة $\Leftarrow \overline{A} = A$

بما أن $A' \subset \overline{A}$ $\Leftarrow$ $A' \subset A$

الاتجاه الأخر

نفرض $A' \subset A$ $\Leftarrow$ $A \cup A' = A$

بما أن $\overline{A} = A \cup A'$ $\Leftarrow$ $\overline{A} = A$ $\Leftarrow$ A مجموعة مغلقة.

مثال (32)

ليكن (X,d) فضاء متربا متماسكا ولتكن $A \subseteq X$ احسب A'

الحل :-

هناك عدة حالات

(1) إذا كانت $A = \phi$ فان $A' = \phi$

(2) إذا كانت $A = X$

(ا) إذا كانت X تحتوي على عنصر واحد فقط فان $A' = \phi$

(ب)إذا كانت X تحتوي على أكثر من عنصر فان $A' = X$

(3) إذا كانت $A \neq X$, $A \neq \phi$

(ا) إذا كانت A تحتوي على عنصر واحد فقط ولتكن $A = \{a\}$ فان $A' = X \mid \{a\}$

(ب) إذا كانت A تحتوي على أكثر من عنصر فان $A' = X$.

مبرهنة(33)

ليكن (X,d) فضاء متربا ولتكن $A, B \subseteq X$

(1)إذا كانت $A \subseteq B$ فان $A' \subseteq B'$

(2) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$

(3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

البرهان

(1)

ليكن $x \in A'$ $\Leftarrow$ لكل $r > 0$ يوجد $y \in A$ بحيث أن $y \neq x$ و $d(x,y) < r$

بما أن $A \subseteq B$ $\Leftarrow$ $y \in B$ $\Leftarrow$ لكل $r > 0$ يوجد $y \in B$ بحيث أن $y \neq x$ و $d(x,y) < r$ $\Leftarrow$ $x \in B'$ وعليه $A' \subseteq B'$

(2)

$(A\cap B)'\subset B',\ (A\cap B)'\subset A' \Leftarrow A\cap B\subset B,\ A\cap B\subset A$ بما أن

$(A\cap B)'\subset A'\cap B' \Leftarrow$

(3)

$B'\subset(A\cup B)',\ A'\subset(A\cup B)' \Leftarrow B\subset A\cup B,\ A\subset A\cup B$ بما أن

$A'\cup B'\subset(A\cup B)' \Leftarrow$

الاتجاه الأخر

نفرض $x\notin B',\ x\notin A' \Leftarrow x\notin A'\cup B'$

$x\notin A' \Leftarrow$ يوجد $r_1>0$ بحيث لكل $y\in A$ وان $y\neq x$ فان $d(x,y)\geq r_1$

وكذلك $x\notin BA \Leftarrow$ يوجد $r_2>0$ بحيث لكل $z\in B$ وان $z\neq x$ فان $d(x,z)\geq r_2$

نضع $r=\min\{r_1,r_2\} \Leftarrow$ يوجد $r>0$ بحيث لكل $w\in A\cup B$ وان $w\neq x$ فان $d(x,w)\geq r$

$(A\cup B)'=A'\cup B' \Leftarrow (A\cup B)'\subset A'\cup B'$ وعليه $x\notin(A\cup B)' \Leftarrow$

ملاحظة

ليس من الضروري أن يكون $(A\cap B)'=A'\cap B'$ والمثال الآتي يوضح ذلك

ليكن $X=\{a,b,c,d\}$ وليكن (X,d) فضاء متري متماسك. إذا كانت $A=\{a\}$, $B=\{c,d\}$ فان

$A'\cap B'=\{b,c,d\} \Leftarrow B'=X$, $A'=\{b,c,d\} \Leftarrow$

$(A\cap B)'\neq A'\cap B' \Leftarrow (A\cap B)'=\phi \Leftarrow A\cap B=\phi \Leftarrow$

تعريف(34)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة حدودية (**Boundary point**) أو (نقطة جبهوية **Frontier Point**) إلى المجموعة A إذا كان لكل $r>0$ يوجد $y\in A, z\in A^c$ بحيث أن $d(x,y)<r, d(x,z)<r$. مجموعة كل النقاط الحدودية إلى المجموعة A تسمى جبهة(**Frontier**) المجموعة A ويرمز لها بالرمز $\partial(A)$، أي أن

$$\partial(A)=\{x\in X:\forall r>0,\ y\in A,\ z\in A^c \ \ni\ d(x,y)<r,\ d(x,z)<r\}$$

مبرهنة (35)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$

(1) $\partial(A)=\overline{A}\cap(\overline{A^c})$ وعليه $\partial(A)\subset\overline{A}$

(2) $\partial(A)=\partial(A^c)$

(3) $\partial(A)$ مجموعة مغلقة في X

$A^\circ = A \mid \partial(A)$ (4)
$\overline{A} = A \cup \partial(A)$ (5)

البرهان

(1)

نفرض أن $x \in \partial(A) \Leftarrow$ لكل مجموعة مفتوحة G في X وتحتوي على x فان

$$G \cap A^c \neq \phi, G \cap A \neq \phi$$

$$\partial(A) \subseteq \overline{A} \cap \overline{(A^c)} \Leftarrow x \in \overline{A} \cap \left(\overline{A}^c\right) \Leftarrow x \in \overline{A}^c \ , \ x \in \overline{A} \Leftarrow$$

وبالمثل نبرهن $\partial(A) = \overline{A} \cap \left(\overline{A^c}\right) \Leftarrow \overline{A} \cap \left(\overline{A^c}\right) \subseteq \partial(A)$

(2)

$$\partial(A) = \overline{A} \cap \left(\overline{A}^c\right) = \left(\overline{A^c}\right) \cap \overline{A} = \partial\left(A^c\right)$$

(3)

بما أن كل من $\overline{A}$, $\left(\overline{A^c}\right)$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow \partial(A) = \overline{A} \cap \left(\overline{A^c}\right)$

(4)

ليكن $x \in A^\circ$. بما أن $A^\circ \subset A \Leftarrow x \in A$

بما أن A° مجموعة مفتوحة في X وتحتوي على x وان $A^\circ \cap A^c = \phi$

$x \notin \partial(A) \Leftarrow$ وعليه $x \in A \mid \partial(A) \Leftarrow A^\circ \subset A \mid \partial(A)$

والاتجاه الأخر

نفرض $y \in A \mid \partial(A) \Leftarrow y \notin \partial(A), \ y \in A$

بما أن $y \notin \partial(A) \Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X تحتوي على x فانه

أما $G \cap A = \phi$ أو $G \cap A^c = \phi$

بما أن $G \cap A \neq \phi \Leftarrow y \in G \cap A \Leftarrow y \in G, y \in A$

$$y \in A^\circ \Leftarrow y \in G \subset A \Leftarrow G \subset A \Leftarrow G \cap A^c = \phi \Leftarrow$$

$A^\circ = A \mid \partial(A)$ وعليه $A \mid \partial(A) \subset A^\circ \Leftarrow$

(5)

بما أن $\partial(A) \subseteq \overline{A}$, $A \subseteq \overline{A} \Leftarrow A \cup \partial(A) \subseteq \overline{A}$

ليكن $x \in \overline{A}$ هنالك احتمالان

(ا) إذا كان $x \in A$ فان $x \in A \cup \partial(A)) \Leftarrow \overline{A} \subseteq A \cup \partial(A\ )$

(ب) إذا كان $x\notin \mathrm{A}$ $\Leftarrow$ $x\in \mathrm{A}^{c}$ $\Leftarrow$ $x\in\left(\overline{\mathrm{A}^{c}}\right)$ $\Leftarrow$ $x\in \overline{\mathrm{A}}\cap\left(\overline{\mathrm{A}^{c}}\right)$

ولكن $\partial(\mathrm{A})=\overline{\mathrm{A}}\cap\left(\overline{\mathrm{A}^{c}}\right)$ $\Leftarrow$ $x\in\partial(\mathrm{A})$ $\Leftarrow$ $x\in \mathrm{A}\cup\partial(\mathrm{A})$ $\Leftarrow$ $\overline{\mathrm{A}}\subset \mathrm{A}\cup\partial(\mathrm{A})$

وعليه $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}\cup\partial(\mathrm{A})$

مثال(36)

ليكن (X,d) فضاء متريا مبعثرا ولتكن $A\subseteq X$. احسب $\partial(\mathrm{A})$

الحل:

بما أن A مجموعة مغلقة $\Leftarrow$ $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}$ وكذلك A^{c} مغلقة $\Leftarrow$ $\left(\overline{\mathrm{A}^{c}}\right)=\mathrm{A}^{c}$

$$\partial(\mathrm{A})=\overline{\mathrm{A}}\cap\left(\overline{\mathrm{A}^{c}}\right)=\mathrm{A}\cap\mathrm{A}^{c}=\phi$$

ليكن (X,d) فضاء متريا متماسكا ولتكن A مجموعة جزئية فعلية غير خالية من X.

$\partial\left(\mathrm{A}^{\circ}\right)\neq\partial(\mathrm{A})$ $\Leftarrow$ $\partial(\mathrm{A})=\mathrm{X}$ ولكن $\partial\left(\mathrm{A}^{\circ}\right)=\phi$ $\Leftarrow$ $\mathrm{A}^{\circ}=\phi$

مبرهنة(37)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $\mathrm{A},B\subseteq \mathrm{X}$

(1) $\partial(\mathrm{A}\cup B)\subseteq\partial(\mathrm{A})\cup\partial(\mathrm{B})$

(2) $\partial(\mathrm{A}\cap \mathrm{B})\subseteq\partial(\mathrm{A})\cup\partial(\mathrm{B})$

البرهان

(1)

$$\begin{aligned}
\partial(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) &= \left(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}\right)\cap\left[\overline{(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})^{c}}\right]\\
&= \left(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}}\right)\cap\left(\overline{\mathrm{A}^{c}\cap\mathrm{B}^{c}}\right)\\
&\subseteq \left(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}}\right)\cap\left(\overline{\mathrm{A}}^{c}\cap\overline{\mathrm{B}}^{c}\right)\\
&= \left[\overline{\mathrm{A}}\cap\left(\overline{\mathrm{A}}^{c}\cap\overline{\mathrm{B}}^{c}\right)\right]\cup\left[\overline{\mathrm{B}}\cap\left(\overline{\mathrm{A}}^{c}\cap\overline{\mathrm{B}}^{c}\right]\right.\\
&= \left[\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{A}}^{c}\right)\cap\overline{\mathrm{B}}^{c}\right]\cup\left[\left(\overline{\mathrm{B}}\cap\overline{\mathrm{B}}^{c}\right)\cap\overline{\mathrm{A}}^{c}\right]\\
&= \left[\partial(\mathrm{A})\cap\left(\overline{\mathrm{B}^{c}}\right)\right]\cup\left[\partial(\mathrm{B})\cap\left(\overline{\mathrm{A}^{c}}\right)\right]\\
&\subseteq \partial(\mathrm{A})\cup\partial(\mathrm{B})
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\partial(A\cap B)&=\left(\overline{A\cap B}\right)\cap\left[\overline{(A\cap B)^c}\right]\\&\subseteq\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap\left(\overline{A^c\cup B^c}\right)\\&=\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap\left(\left(\overline{A^c}\right)\cup\left(\overline{B^c}\right)\right)\\&=\left[\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap\left(\overline{A^c}\right)\right]\cup\left[\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap\left(\overline{B^c}\right)\right]\\&=\left[\left(\overline{A}\cap\left(\overline{A^c}\right)\right)\cap\overline{B}\right]\cup\left[\overline{A}\cap\left(\overline{B}\cap\left(\overline{B^c}\right)\right)\right]\\&=\left(\partial(A)\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\partial(B)\right)\\&\subset\partial(A)\cup\partial(B)\end{aligned}$$

المصادر

[1] عادل غسان نعوم،"**مقدمة في التحليل الرياضي**"، جامعة بغداد – العراق 1986.

[2] Apostol, " Mathematical Analysis"**,2 nd, 1974**

[3] Ash, R. B., " Real Analysis And Probability"**, 1972.**

[4] Billingsley, P., " Probability And Measure " **, 1979-1986.**

[5] Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.," Real Variables" **, 1969.**

[6] Edwin Hewitt Karl Stromberg, " Real And Abstract Analysis" **, 1978**

[7] Folland . G. B.," Real Analysis"**,2 nd, 1999**

[8] Goldberg, R. R.," Methods Of Real Analysis"**,1979.**

[9] Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.," Introductory Real Analysis",**1970.**

[10] Royden, H. L.," Real Analysis",**1988**

[11] Rudin, W., " Principles Of Mathematical Analysis",**1953**

[12] Rudin, W., " Real And Complex Analysis",**19**

[13] Ruel V. Churchill James W. Brown Roger F. Verhey," Complex Variables And Applications",**3 rd, 1974.**

[14] Scott, D. B., And Tims, S. R.," Mathematical Analysis An Introduction",**1966.**

[15] Sharma, J. N And Vasishtha, A. R.," Real Analysis",**5 th, 1977.**

[16] Walter Rudin," Principles Of Mathematical Analysis",**2 nd, 1964.**

[17] Walter Rudin," Real And Complex Analysis",**2 nd, 1974.**

[18] Walter Rudin," Principles Of Mathematical Analysis",**3 rd, 1986.**

محاضرات
الأستاذ المساعد الدكتور نوري فرحان المياحي
قسم الرياضيات – كلية علوم الحاسوب والرياضيات – جامعة القادسية – العراق

ر331
التحليل الرياضي (1) Mathematical Analysis I

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

المحاضرة السادسة
التقارب Convergence

تعريف (1)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة في الفضاء المتري (X,d). يقال عن $\{x_n\}$ بأنها متقاربة **(Convergent)** في X إذا وجد $x \in X$ بحيث أن، لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث :

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n > k$$

ويقال أن النقطة x هي نقطة تقارب للمتتابعة $\{x_n\}$ وتكتب بالشكل

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{أو} \quad x_n \to x \quad \text{عندما} \quad n \to \infty$$

وهذا يعني أن :

$$x_n \to x \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0 \quad \text{عندما} \quad n \to \infty$$

إذا كانت $\{x_n\}$ غير متقاربة تسمى متباعدة **(Divergent)**.

مبرهنة (2)

إذا كانت المتتابعة $\{x_n\}$ متقاربة في الفضاء المتري (X,d) فان نقطة تقاربها وحيدة.

البرهان

نفرض $x_n \to x$, $x_n \to y$ بحيث أن $x \neq y$

وليكن $d(x,y) = \varepsilon \Leftarrow \varepsilon > 0$

بما أن $x_n \to x \Leftarrow$ يوجد $k_1 \in Z^+$ بحيث $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > k_1$

وكذلك $x_n \to y$ يوجد $k_2 \in Z^+$ بحيث $d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n > k_2$

نضع $k = \max\{k_1, k_2\}$ ، فيكون

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2},\ d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > k$$

$$\varepsilon = d(x,y) = d(x_n, x) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهذا تناقض وعليه فأن $x = y$.

مثال(3)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة متقاربة في الفضاء المتري الاعتيادي (R,d_u)

بما أن $\{x_n\}$ متقاربة $\Leftarrow$ يوجد $x\in R$ بحيث $x_n \longrightarrow x$

ليكن $\varepsilon>0 \Leftarrow$ يوجد $k\in Z^+$ بحيث

$$d(x_n,x)<\varepsilon \quad \forall \quad n>k$$

بما أن (R,d_u) فضاء متري اعتيادي

$$d(x_n,x)=|x_n-x|$$
$$|x_n-x|<\varepsilon \quad \forall \quad n>k$$
$$-\varepsilon<x_n-x<\varepsilon \quad \forall \quad n>k$$
$$x-\varepsilon<x_n<x+\varepsilon \Rightarrow \quad x_n\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon) \quad \forall \quad n>k$$

وهذا يعني أن المتتابعة $\{x_n\}$ متقاربة في R إذا وجد $x\in R$ بحيث أن لكل $\varepsilon>0$ الفترة المفتوحة $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ مركزها x تحتوي على معظم حدود المتتابعة.

مبرهنة (4)

لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء المتري (X,d) ، فان $x\in\overline{A}$ إذا وفقط إذا ، توجد متتابعة $\{x_n\}$ في A بحيث أن $x_n\to x$.

البرهان

نفرض $x\in\overline{A}$

بما أن $\overline{A}=A\cup A' \Leftarrow x\in A\cup A' \Leftarrow x\in A$ أو $x\in A'$

إذا كان $x\in A$ فان من الواضح أن المتتابعة $\{x\}$ في X وان $x\to x$

أما إذا كانت $x\notin A$ فان $x\in A'$

ليكن $n\in Z^+ \Leftarrow r=\frac{1}{n}>0 \Leftarrow B_r(x)$ مجموعة مفتوحة وتحتوي على x

بما أن $x\in A' \Leftarrow A\cap(B_r(x)|\{x\})\neq\Phi \Leftarrow$

$$x_n\in A\cap(B_{\frac{1}{n}}(x)|\{x\}) \quad \forall n\in Z^+$$

نلاحظ أن $\{x_n\}$ متتابعة في A. بقي أن نبرهن ، بأن $x_n\to x$

ليكن $\varepsilon>0 \Leftarrow$ باستخدام خاصية ارخميدس يوجد $k\in Z^+$ بحيث $\frac{1}{k}<\varepsilon$

بما أن $x_n\in B_{\frac{1}{n}}(x) \Leftarrow d(x_n,x)<\frac{1}{n}$ لكل $n\in Z^+$

ليكن $n>k \Leftarrow \frac{1}{n}<\frac{1}{k} \Leftarrow d(x_n,x)<\frac{1}{k}<\varepsilon \Leftarrow x_n\to x$.

الاتجاه المعاكس: نفرض $\{x_n\}$ متتابعة في A بحيث $x_n\to x$

يجب أن نبرهن أن $x \in \overline{A}$ ، أي أن $x \in A \cup A'$
إذا كانت $x \in A$ ينتهي البرهان . أما إذا كانت $x \notin A$ ،نفرض G مجموعة مفتوحة في **X** وتحتوي على $x \Leftarrow$ يوجد $r > 0$ بحيث أن $B_r(x) \subset G$.
بما أن $r > 0$, $x_n \to x \Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن $d(x_n, x) < r$ لكل $n > k$
$x_n \in B_r(x) \Leftarrow$ لكل $n > k$
بما أن $x_n \in A$ لكل $n \in Z^+ \Leftarrow A \cap (B_r(x) | \{x\}) \neq \phi$
بما أن $B_r(x) \subset G \Leftarrow A \cap (G | \{x\}) \neq \phi \Leftarrow x \in A' \Leftarrow x \in \overline{A}$. ♦

تعريف (5)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة في الفضاء المتري (X, d). يقال عن $\{x_n\}$ بأنها متتابعة كوشي (**Cauchy sequence**) في X إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن :

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad \forall n, m > k$$

مبرهنة (6)

كل متتابعة متقاربة في الفضاء المتري (X, d) تكون متتابعة كوشي .

البرهان

لتكن $\{x_n\}$متتابعة متقاربة في الفضاء المتري (X, d)
$\Leftarrow$ يوجد $x \in X$ بحيث أن $x_n \to x$ ،
ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن $x_n \to x \Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > k$$

إذا كان $n, m \geq k$ ، فأن

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وعليه فأن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في X . ♦

ملاحظة

ليس من الضروري أن كل متتابعة كوشي في فضاءً متريا (X, d)ً تكون متقاربة في X والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (7)

ليكن $X = R \setminus \{0\}$ ولتكن الدالة $d : X \times X \longrightarrow R$ معرفة كالأتي

$$d(x,y) = |x-y|$$

ولتكن $x_n = \frac{1}{n}$. لاحظ أن (X,d) فضاء متريا وان $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في X ولكنهما غير متقاربة في X.

مبرهنة (8)

إذا كانت متتابعة كوشي في فضاء متري تمتلك متتابعة جزئية متقاربة فأنها متقاربة.

البرهان:

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في الفضاء المتري (X,d) ولتكن $\{x_{i_n}\}$ متتابعة جزئية من المتتابعة $\{x_n\}$ متقاربة إلى $x_0 \in X$ ، أي أن $x_{i_n} \to x_0$

$\Leftarrow$ $\{x_{i_n}\}$ متتابعة كوشي $\Leftarrow$ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن $d(x_{i_n}, x_{i_m}) < \varepsilon$ لكل $n,m \geq k$

بما أن $\{i_m\}$ متتابعة متزايدة حديا من الأعداد الصحيحة.

عندما $m \to \infty$ نحصل على $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ لكل $n \geq k$

$\Leftarrow$ $x_n \to x_0$ وعلية فان المتتابعة $\{x_n\}$ متقاربة

مبرهنة (9)

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ متتابعة في X بحيث أن

$y_n \to y$, $x_n \to x$ حيث $x, y \in X$ فان $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$

البرهان:

$$d(x_n, y) - d(x,y) = (d(x_n, y_n) - d(x_n, y)) + (d(x_n y) - d(x,y))$$

$$|d(x_n, y) - d(x,y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n y) - d(x,y)| \leq d(y_n, y) + d(x_n, x) \longrightarrow 0 \quad as \quad n \to \infty$$

$$d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x,y)$$

نتيجة (10)

إذا كانت كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ متتابعة كوشي في الفضاء المتري (X,d) فان $\{d(x_n, y_n)\}$ تكون متتابعة كوشي في R وبالتالي تكون متقاربة.

البرهان

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) - d(y_n, y_m) \longrightarrow 0 \quad as \quad n,m \longrightarrow \infty$$

مثال (11)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن $\{x_n\}$ متتابعة في X .برهن على أن $x_n \longrightarrow x$ حيث $x \in X$ إذا وفقط إذا وجد $k \in Z^+$ بحيث $x_n = x$ لكل $n > k$.

البرهان:

الاتجاه الأول : نفرض $x_n \to x$ $\Leftarrow$ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث $d(x_n, x) < \varepsilon$ لكل $n > k$

بما أن $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ $\Leftarrow$ $d(x_n, x) = 0$ لكل $n > k$

$\Leftarrow$ $x_n = x$ لكل $n > k$.

تعريف (15)

يقال عن الفضاء المتري (X,d) بأنه كاملاً (**C0mplete**) إذا كانت كل متتابعة كوشي فيه متقاربة.

مثال(16)

لتكن $d : Q \times Q \longrightarrow R$ دالة معرفة كالأتي

$$d(x,y) = |x - y| \quad \forall \quad x, y \in Q$$

لاحظ أن (Q,d) فضاء متري ولكنه غير كامل وذلك حسب المبرهنة (15.5) توجد متتابعة كوشي في Q ولكن غير متقاربة في Q.

مثال(17)

الفضاء الاقليدي (R^n, d) يكون فضاء متريا كاملاً.

الحل

ليكن $x, y \in R^n$

$$x = (x_1, ..., x_n) \ , \ y = (y_1, ..., y_n)$$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

لتكن $\{x_m\}$ متتابعة كوشي في R^n

$$x_m \in R^n \quad , \quad x_m = (x_1^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$$

ليكن $\varepsilon > 0$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث

$$d(x_m, x_l) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(l)})^2}$$