$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(m)}-x_i^{(l)})^2<\varepsilon^2$$
$$\left|x_i^{(m)}-x_i^{(l)}\right|<\varepsilon \quad \forall \quad m,l>k$$

$\Leftarrow \{x_m\}$ متتابعة كوشي في $R$ لكل $i=1,...,n$
بما أن $R$ حقل كامل $\Leftarrow x_i\in R$ بحيث $\forall \quad i=1,...,n \quad x_1^{(m)}\longrightarrow x_i$
نضع $x=(x_1,...,x_n) \Leftarrow x\in R^n \Leftarrow x_m\longrightarrow x$
$\therefore$ المتتابعة $\{x_m\}$ تكون متقاربة في $R^n$

## مبرهنة (18)

ليكن $(Y,d_Y)$ فضاء جزئياً من الفضاء المتري الكامل $(X,d)$ ، فان $(Y,d_Y)$ يكون كامل إذا كانت $Y$ مجموعة مغلقة في $X$.

**البرهان**

نفرض $(Y,d_Y)$ فضاء متري كامل
ليكن $x\in \overline{A} \Leftarrow$ توجد متتابعة $\{x_n\}$ في $A$ بحيث أن $x_n\to x \Leftarrow \{x_n\}$ متتابعة متقاربة
وعليه $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في $Y$.
بما أن $(Y,d_Y)$ فضاء متري كامل $\Leftarrow$ يوجد $y\in Y$ بحيث أن $x_n\to y$
ولكن التقارب وحيد $\Leftarrow y=x$ وعليه فأن $x\in Y \Leftarrow Y$ مجموعة مغلقة في $X$.
الآن نبرهن الاتجاه المعاكس نفرض $Y$ مجموعة مغلقة في $X$.
لتكن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في $Y$
بما أن $Y\subset X \Leftarrow \{x_n\}$ متتابعة كوشي في $X$
وبما أن $(X,d)$ فضاء متري كامل $\Leftarrow \{x_n\}$ متقاربة في $X$ ، أي يوجد $x\in X$ بحيث أن $x_n\to x$
بما آن $x_n\in Y \Leftarrow x\in \overline{Y}$ وبما أن $Y$ مجموعة مغلقة في $X \Leftarrow \overline{Y}=Y$ وعليه فأن $x\in Y$
لذلك المتتابعة $\{x_n\}$ متقاربة في $Y \Leftarrow (Y,d_Y)$ فضاء متري كامل . ♦

## ملاحظة

إذا كان $(Y,d_Y)$ فضاء جزئياً من الفضاء المتري الكامل $(X,d)$ ، فانه ليس من الضروري $(Y,d_Y)$ يكون كامل. والمثال التالي يوضح ذلك

## مثال (19)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(R,d_u)$. نلاحظ أن $(R,d_u)$ فضاء متريا كاملا، وان $(Q,d_Q)$ فضاء جزئيا من $(R,d_u)$ ولكنة غير كامل.

## تعريف (20)

ليكن $(X,d)$ فضاء متريا. يقال عن الدالة $f:X\to X$ بأنها دالة انكماشيةً ( **Contracting Function**) أو( انكماش**Contraction** ) على $X$ إذا وجد عدد حقيقي $k$ , $0\le k<1$ بحيث أن

$$d(f(x),f(y))\le k\,d(x,y)$$

لكل $x,y\in X$ .

## مثال (21)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(R^2,d_u)$ تكون الدالة $f:R^2\to R^2$ مغرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{2}x$ لكل $x\in R^2$ انكماش على $R^2$ .

الحل:

ليكن $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in R^2$

$$d(f(x),f(y))=d(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)=d((\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{2}x_2),(\frac{1}{2}y_1,\frac{1}{2}y_2))=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=\frac{1}{2}d(x,y)$$

## مبرهنة(22)

ليكن $(X,d)$ فضاء متريا كاملا ولتكن $f:X\to X$ دالة انكماشيةً على $X$ ، فأنة إذا وجد نقطة واحدة فقط $x$ في $X$ بحيث أن $f(x)=x$ ، وتسمى هذه النقطة بالنقطة الصامدة.

البرهان:

بما أن الدالة $f:X\to X$ انكماشيةً على $X$ $\Leftarrow$ يوجد عدد حقيقي $k$ , $0\le k<1$ بحيث أن

$$d(f(x),f(y))\le k\,d(x,y)$$

لكل $x,y\in X$ .

$\Leftarrow$ $d(f^2(x),f^2(y))\le kd(f(x),f(y))\le k^2d(x,y)$ لكل $x,y\in X$ .

وبصورة عامة إذا كان $n$ عدد صحيح موجب فان

$$d(f^n(x),f^n(y))\le k^n d(x,y)$$

لكل $x,y\in X$ .

الآن لتكن $x_0$ أية نقطة في $X$ . نضع

$$x_1=f(x_0)$$
$$x_2=f(x_1)=f(f(x_0))=f^2(x_0)$$
$$\vdots$$
$$x_n=f(x_{n-1})=\cdots=f^n(x_0)$$

يجب أن نبرهن على أن المتتابعة $\{x_n\}$ هي متتابعة كوشي في $X$ .

ليكن $m,n$ أي عددين صحيحين موجبين بحيث أن $n<m$ .

$$f^m(x_0) = f^n(x_{m-n})$$

$$d(x_m, x_n) = d(f^n(x_0), f^n(x_0)) \le k^n d(x_{m-n}, x_0) \le k^n \sum_{i=0}^{m-n-1} d(x_i, x_{i+1}) \le k^n \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i d(x_0, x_1) = \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

بما أن $k < 1$ $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ $\Leftarrow$ لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $n$ بحيث أن

$$d(x_m, x_n) \le \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في $X$.

بما أن الفضاء المتري $(X, d)$ كاملا $\Leftarrow$ يوجد $x \in X$ بحيث أن $x_n \to x$ وعلية

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

الآن

$f(x_n) = x_{n+1}$ لذلك $\{f(x_n)\}$متتابعة جزئية من المتتابعة $\{x_n\}$ وعلية المتتابعة $\{f(x_n)\}$ تكون متقاربة إلى $x$، أي أن $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x$ ، وبما أن التقارب يكون وحيد $\Leftarrow$ $f(x) = x$.

لأجل أن نبرهن النقطة الصامدة وحيدة.نفرض $y \in X$ بحيث أن $f(y) = y$

$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le kd(x, y)$ $\Leftarrow$ $kd(x, y) \ge d(x, y)$

إذا كان $d(x, y) \ne 0$ فان $k \ge 1$، وهذا تناقض لان$0 < k \le 1$

$\Leftarrow$ $d(x, y) = 0$ $\Leftarrow$ $x = y$

## المصادر

[1] عادل غسان نعوم،"**مقدمة في التحليل الرياضي**"، جامعة بغداد – العراق 1986.

**[2] Apostol,** " Mathematical Analysis"**,2 nd, 1974**

**[3] Ash, R. B.,** " Real Analysis And Probability"**, 1972.**

**[4] Billingsley, P.,** " Probability And Measure " **, 1979.**

**[5] Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.,**" Real Variables" **, 1969.**

**[6] Edwin Hewitt Karl Stromberg,** " Real And Abstract Analysis" **, 1978**

**[7] Folland . G. B.,**" Real Analysis"**,2 nd, 1999**

**[8] Goldberg, R. R.,**" Methods Of Real Analysis"**,1979.**

**[9] Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.,**" Introductory Real Analysis",**1970.**

**[10] Royden, H. L.,**" Real Analysis",**1988**

**[11] Rudin, W.,** " Principles Of Mathematical Analysis",**1953**

**[12] Rudin, W.,** " Real And Complex Analysis",**19**

**[13] Ruel V. Churchill James W. Brown Roger F. Verhey,**" Complex Variables And Applications",**3 rd, 1974.**

**[14] Scott, D. B., And Tims, S. R.,"** Mathematical Analysis An Introduction",**1966.**
**[15] Sharma, J. N And Vasishtha, A. R.,"** Real Analysis",**5 th, 1977.**
**[16] Walter Rudin,"** Principles Of Mathematical Analysis",**2 nd, 1964.**
**[17] Walter Rudin,"** Real And Complex Analysis",**2 nd, 1974.**
**[18] Walter Rudin,"** Principles Of Mathematical Analysis",**3 rd, 1986.**

# ر331
# التحليل الرياضي (1) Mathematical Analysis I

**نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3**

## المحاضرة السابعة

### بعض الفضاءات المترية المهمة Some Important Metric Spaces

قبل التطرق لهذه الفضاءات المترية المهمة نحتاج إلى بعض المتراجحات المهمة

### مأخوذة (1)

إذا كان $p>1, q>1$ بحيث أن $a\ge 0, b\ge 0,$ فان $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ وتحقق $ab\le \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$ المساواة إذا وفقط إذا كان $a^p=b^q$

**البرهان:**

لتكن $f(t)=1-\lambda+\lambda t-t^\lambda$ حيث $t\ge 0, \lambda=\frac{1}{p}$

$f'(t)<0$ لكل $0<t<1$ **وان** $f'(t)>0$ لكل $t>0 \Leftarrow f(t)\ge f(1)=0$

وتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان $t=1$ وعلية $1-\lambda+\lambda t-t^\lambda\ge 0$، أي أن

$t^\lambda\le 1-\lambda+\lambda t$

إذا كانت $b=0$ فان $ab=0\le\frac{1}{p}a^p$، أما إذا كانت $b>0$ فإننا نضع $t=\frac{a^p}{b^q}$ ، وعلية نحصل

$$(\frac{a^p}{a^q})^\lambda\le 1-\lambda+\lambda\frac{a^p}{b^q}$$

بما أن $\lambda=\frac{1}{p} \Leftarrow (\frac{a^p}{a^q})^{\frac{1}{p}}\le 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} \Leftarrow b^q(\frac{a^p}{a^q})^{\frac{1}{p}}\le(1-\frac{1}{p})b^q+\frac{1}{p}a^p$

ولكن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftarrow 1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$ وكذلك $b^q(\frac{a^p}{a^q})^{\frac{1}{p}}=ab^{q-\frac{q}{p}}=ab^{q\frac{1}{q}}=ab$

$\Leftarrow ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$

**مبرهنة(2)** ( متراجحة هولدر **(Holder's Inequality**

إذا كان $p,q \in R$ بحيث أن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فان

$$\sum_i |x_i y_i| \le (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

حيث $x_i, y_i$ أعداد حقيقية. وبصورة عامة إذا كانت كل من $f, g$ دالة حقيقية قابلة للتكامل ريمانيا عل الفترة $[a,b]$ فان

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

**البرهان:**

نضع $a = (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad b = (\sum_i |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$

إذا كان $ab = 0$ فان أما $a = 0$ أو $b = 0$ وينتهي البرهان.

أما إذا كان $ab > 0$ فان $\frac{|x_i|}{a}.\frac{|y_i|}{b} \le \frac{1}{p}(\frac{|x_i|}{a})^p + \frac{1}{q}(\frac{|y_i|}{b})^q$ ( حسب المأخوذة 1.6)

$$\sum_i |x_i y_i| \le ab(\frac{1}{pa^p}\sum_i |x_i|^p + \frac{1}{qb^q}\sum_i |y_i|^q) = ab(\frac{1}{pa^p}a^p + \frac{1}{qb^q}b^q) = ab(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}) = ab$$

$$\Leftarrow \quad \sum_i |x_i y_i| \le (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

**نتيجة(3)** متراجحة كوشي– شوار **( Cauchy-Schwars Inequality )**

$$\sum_i |x_i y_i| \le (\sum_i |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_i |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

حيث $x_i, y_i$ أعداد حقيقية. وبصورة عامة إذا كانت كل من $f, g$ دالة حقيقية قابلة للتكامل ريمانيا عل الفترة $[a,b]$ فان

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

البرهان:

مباشرة من المبرهنة عندما $p = 2$ فان $q = 2$ .

**مبرهنة(4)** ( متراجحة منكوفسكي **(Minkokowsk's Inequality**
إذا كان $p \geq 1$ فان

$$(\sum_{i=1}|x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}|y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

حيث $x_i, y_i$ أعداد حقيقية. وبصورة عامة إذا كانت كل من $f, g$ دالة حقيقية قابلة للتكامل ريمانبا عل الفترة $[a,b]$ فان

$$(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_a^b |g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

**البرهان:**

الحالة واضحة عندما $p = 1$ ، أما إذا كانت $p > 1$ ، نختار $q$ بحيث أن $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$

$q > 1 \Leftarrow$

$$\sum_i |x_i + y_i|^p \leq \sum_i |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_i |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$

باستخدام متراجحة هولدر نحصل على

$$\sum_i |x_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i + y_i|^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}, \quad \sum_i |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq (\sum_i |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i + y_i|^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}$$

ولكن $q(p-1) = p \Leftarrow$

$$\sum_i |x_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{q}}, \quad \sum_i |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq (\sum_i |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_i |x_i + y_i|^p \leq (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{q}} + (\sum_i |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$(\sum_i |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_i |x_i + y_i|^p)^{1-\frac{1}{q}} \leq (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_i |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

**مثال** (5)

ليكن $X = C[0,1]$ ، أي أن $X$ تمثل مجموعة كل الدوال الحقيقية المقيدة والمستمرة على الفترة المغلقة $[0,1]$. عرف الدالة $d : X \times X \to R$ بالشكل الأتي:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

لكل $f, g \in X$ ، فان $(X,d)$ فضاء متري غير كامل.

الحل:

بما أن كل الدوال المقيدة والمستمرة قابلة للتكامل الريماني.واستخدام خواص التكامل الريماني نبرهن البديهيات الآتية:

(1)

ليكن $f,g\in X$ $\Leftarrow$ $|f(x)-g(x)|>0$ $\Leftarrow$ $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx>0$

(2)

ليكن $f,g\in X$

$$d(f,g)=0 \Leftrightarrow \int_0^1|f(x)-g(x)|dx=0 \Leftrightarrow |f(x)-g(x)|=0 \Leftrightarrow f=g$$

(3)

ليكن $f,g\in X$

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|g(x)-f(x)|dx=d(g,f)$$

(4)

ليكن $f,g,h\in X$

$$\begin{aligned}d(f,g)&=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx\\&=\int_0^1|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|dx\\&\le\int_0^1(|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)dx\\&=\int_0^1|f(x)-h(x)|dx+\int_0^1|h(x)-g(x)|dx\\&=d(f,h)+d(h,g)\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ $d$ دالة مترية، وعلية فان $(X,d)$ فضاء متري . بقي أن نبرهن $(X,d)$ غير كامل

ليكن $n\ge 3$

لو أخذنا المتتابعة $\{f_n\}$ بحيث

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le x\le\frac{1}{2}\\ -nx+\frac{1}{2}n+1 & ; \quad \frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\\ 0 & ; \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$$

يجب أن نبرهن

1) $\{f_n\}$ متتابعة كوشي

إذا كان $m>n>3$ ، فأن

$$d(f_m,f_n)==\int_0^1|f_m(x)-f_n(x)|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}|f_m(x)-f_n(x)|\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1|f_m(x)-f_n(x)|\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} |1-1|\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|\,dx$$

$$\le \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f_m(x)|\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f_n(x)|\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left| -mx + \frac{1}{2}m + 1 \right| dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left| -nx + \frac{1}{2}n + 1 \right| dx$$

بما أن $-mx + \frac{1}{2}m + 1 \ge 0$ عندما $\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$

$d(f_m, f_n) \to 0 \Leftarrow d(f_m, f_n) \le \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n}$ عندما $n, m \to \infty$

$\Leftarrow$ $\{f_n\}$ متتابعة كوشي

**2)** المتتابعة $\{f_n\}$ غير متقاربة. سنبرهن بطريقة التناقض

نفرض يوجد $f \in X$ بحيث $f_n \to f \Leftarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ وعليه فأن

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

وهذا تناقض لان $f$ دالة غير مستمرة . ♦

**مثال (6)**

ليكن $X = C[0,1]$ ، أي أن $X$ تمثل مجموعة كل الدوال الحقيقية المقيدة والمستمرة على الفترة المغلقة $[0,1]$. عرف الدالة $d : X \times X \to R$ بالشكل الأتي:

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

لكل $f, g \in X$ ، فان $(X,d)$ فضاء متري كامل.

**الحل**

(1)

ليكن $f, g \in X$ لكل $x \in [0,1] \Leftarrow |f(x) - g(x)| > 0$

$\Leftarrow d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\} > 0$

(2)

ليكن $f, g \in X$

$$d(f,g) = 0 \Leftrightarrow \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\} = 0 \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f = g$$

(3)

ليكن $f, g \in X$

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\} = \sup\{|g(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = d(g,f)$$

(4)

ليكن $f,g,h\in X$

$$\begin{aligned}d(f,g)&=\sup\{|f(x)-g(x)|:x\in[0,1]\}\\&=\sup\{|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|:x\in[0,1\}\\&\le\sup\{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|:x\in[0,1\}\\&=\sup\{|f(x)-h(x)|:x\in[0,1\}+\sup\{|h(x)-g(x)|:x\in[0,1\}\\&=d(f,h)+d(h,g)\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ $d$ دالة مترية، وعلية فان $(X,d)$ فضاء متري . بقي أن نبرهن $(X,d)$ كامل

**مثال** (7)

ليكن $L^p[a,b]$ ، $1\le p<\infty$، يمثل مجموعة الدوال الحقيقية $f:[a,b]\to R$ بحيث أن $\int_a^b|f(x)|^p dx<\infty$، أي أن

$$L^p[a,b]=\left\{f:[a,b]\to R,\quad \int_a^b|f(x)|^p dx<\infty\right\}$$

عرف الدالة $d:X\times X\to R$ بالشكل الأتي:

$$d(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

لكل $f,g\in L^p[a,b]$ ، فان $(L^p[a,b],d)$ فضاء متري كامل.

الحل:

**مثال** (8)

لتكن $l^p$ ، $1\le p<\infty$، يمثل مجموعة المتتابعات الحقيقية $x=\{x_n\}$ بحيث أن $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$ ، أي أن

$$l^p=\{x=\{x_n\}:\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty,\quad 1\le p<\infty\quad\}$$

عرف الدالة $d_p:l^p\times l^p\to R$ بالشكل الأتي:

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_x-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

لكل $x=\{x_n\},y=\{y_n\}\in l^p$ ، فان $(\ell^p,d_p)$ فضاء متري كامل.

**الحل** :

البديهيات 1) ، 2) ، 3) واضح برهانها وكما في الأمثلة السابقة .ونبرهن البديهية 4)

(4)

ليكن $x,y\in l^p$

$$x+y=(x_1+y_1,...,x_n+y_n,...)$$

$$\|x+y\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

باستخدام متراجحة منكوفسكي ينتج

$$\|x+y\|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|+\|y\|$$

**مثال (9)**

لتكن $l^{\infty}$ يمثل مجموعة المتتابعات الحقيقية المقيدة

$$l^{\infty}=\{x=\{x_n\}:\}$$

عرف الدالة $d_{\infty}:l^{\infty}\times l^{\infty}\to R$ بالشكل الأتي:

$$d_{\infty}(x,y)=\sup\{|x_n-y_n|:\quad n\in N\}$$

لكل $x=\{x_n\},y=\{y_n\}\in l^{\infty}$ ، فان $(\ell^{\infty},d_{\infty})$ فضاء متري كامل.

**الحل**:

$H.W$

## المصادر

[1] عادل غسان نعوم،"**مقدمة في التحليل الرياضي**"، جامعة بغداد – العراق 1986.

**[2] Apostol,** " Mathematical Analysis"**,2 nd, 1974**

**[3] Ash, R. B.,** " Real Analysis And Probability"**, 1972.**

**[4] Billingsley, P.,** " Probability And Measure " **, 1979.**

**[5] Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.,**" Real Variables" **, 1969.**

**[6] Edwin Hewitt Karl Stromberg,** " Real And Abstract Analysis" **, 1978**

**[7] Folland . G. B.,**" Real Analysis"**,2 nd, 1999**

**[8] Goldberg, R. R.,**" Methods Of Real Analysis"**,1979.**

**[9] Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.,**" Introductory Real Analysis",**1970.**

**[10] Royden, H. L.,**" Real Analysis",**1988**

**[11] Rudin, W.,** " Principles Of Mathematical Analysis",**1953**

**[12] Rudin, W.,** " Real And Complex Analysis",**19**

**[13] Ruel V. Churchill James W. Brown Roger F. Verhey,**" Complex Variables And Applications",**3 rd, 1974.**

**[14] Scott, D. B., And Tims, S. R.,"** Mathematical Analysis An Introduction",**1966.**
**[15] Sharma, J. N And Vasishtha, A. R.,"** Real Analysis",**5 th, 1977.**
**[16] Walter Rudin,"** Principles Of Mathematical Analysis",**2 nd, 1964.**
**[17] Walter Rudin,"** Real And Complex Analysis",**2 nd, 1974.**
**[18] Walter Rudin,"** Principles Of Mathematical Analysis",**3 rd, 1986.**

**محاضرات**
**الأستاذ المساعد الدكتور نوري فرحان المياحي**
**قسم الرياضيات – كلية علوم الحاسوب والرياضيات – جامعة القادسية – العراق**

# ر331
# التحليل الرياضي (1) Mathematical Analysis I

**نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3**

## المحاضرة الثامنة

# الاستمرارية Continuity

**تعريف (1)**

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا. يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها مستمرة (**Continuous**) عند النقطة $x_0\in X$ إذا كان لكل مجموعة مفتوحة $U$ في $Y$ تحتوي على النقطة $f(x_0)$ ، توجد مجموعة مفتوحة $V$ في $X$ تحتوي على النقطة $x_0$ بحيث أن $f(V)\subset U$ . يقال عن الدالة $f$ بأنها مستمرة على المجموعة $A\subseteq X$ إذا كانت $f$ مستمرة عند كل نقطة من نقاط $A$ . وبصورة عامة يقال عن الدالة $f$ بأنها مستمرة إذا كانت $f$ مستمرة عند كل نقطة من نقاط $X$ .

**مبرهنة (2)**

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا . فأن الدالة $f:X\to Y$ تكون مستمرة عند النقطة $x_0\in X$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الأتي :

لكل كرة مفتوحة $\beta_\varepsilon(f(x_0))$ في $Y$ ، توجد كرة مفتوحة $\beta_\delta(x_0)$ في $X$ بحيث أن

$$f(\beta_\delta(x_0))\subset\beta_\varepsilon(f(x_0))$$

وهذا يكافئ الشرط الأتي: لكل $\varepsilon>0$ ، يوجد $\delta>0$ بحيث أن لكل $x\in X$ فان

$$d_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon \quad\Leftarrow\quad d_1(x,x_0)<\delta$$

**البرهان:**

نفرض الدالة $f$ مستمرة عند النقطة $x_0$

ليكن $\varepsilon>0$ . نضع $U=\beta_\delta(f(x_0))$ $\Leftarrow$ كرة مفتوحة في $Y$ $\Leftarrow$ مجموعة مفتوحة في $Y$ تحتوي على النقطة $f(x_0)$ .

بما أن $f$ مستمرة عند النقطة $x_0$ في $X$ $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة $V$ في $X$ تحتوي على النقطة $x_0$ بحيث أن $f(V)\subset U$ .

بما أن $V$ مجموعة مفتوحة في $X$ تحتوي على النقطة $x_0$ $\Leftarrow$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن

$$f(\beta_\delta(x_0))\subset f(V)\subset U=\beta_\varepsilon(f(x_0)) \quad\Leftarrow\quad \beta_\delta(x_0)\subset V$$

**ا لاتجاه المعاكس**

نفرض الشرط في المبرهنة متحقق ونبرهن $f$ مستمرة عند النقطة $x_0$

ليكن $U$مجموعة مفتوحة في $Y$ تحتوي على النقطة $f(x_0)$

$\Leftarrow$ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $\beta_\varepsilon(f(x_0)) \subset U$ $\Leftarrow$ توجد كرة مفتوحة $\beta_\delta(x_0)$ في $X$ بحيث أن $f(\beta_\delta(x_0)) \subset \beta_\varepsilon(f(x_0))$

نضع $V = \beta_\delta(x_0)$ $\Leftarrow$ $V$ مجموعة مفتوحة في $X$ تحتوي على النقطة $x_0$ بحيث أن $f(V) = f(\beta_\delta(x_0)) \subset \beta_\varepsilon(f(x_0)) = U$ . وعليه $f$ مستمرة عند النقطة$x_0$ .

## مثال (3)

ليكن $(R,d)$ فضاء متريا اعتياديا .برهن على أن الدالة $f: R \to R$ المعرفة بالصيغة $f(x) = x^2$ $x \in R$ تكون مستمرة.

**الحل:**

ليكن $x_0 \in R$ وليكن $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0||x + x_0|$$

بما أن $|x + x_0| \le |x| + |x_0|$

$$|f(x) - f(x_0)| \le |x - x_0|(|x| + |x_0|) \quad ...(1)$$

بما أن $x = (x - x_0) + x_0 \Leftarrow |x| = |(x - x_0) + x_0| \Leftarrow$

$$|x| \le |x - x_0| + |x_0|$$

$$|x| - |x_0| \le |x - x_0|$$

إذا كان $|x - x_0| < 1$ فان $|x| - |x_0| < 1$

$$|x| < 1 + |x_0| \quad ...(2)$$

من (1),(2) نحصل على

$$|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|(1 + 2|x_0|) \quad ...(3)$$

نختار $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right\}$ . الآن ليكن $x \in R$ بحيث أن $|x - x_0| < \delta$