$$|x-x_0|<(1+2|x_0|)<\varepsilon \quad \Leftarrow \quad |x-x_0|<1 \text{ و } |x-x_0|<\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|} \quad \Leftarrow$$

من (3) نحصل على

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 وعلية الدالة f مستمرة.

مثال (4)

ليكن (R,d) فضاء متريا اعتياديا. برهن على أن الدالة $f:R\to R$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{x}$ لكل $x\in R^+$ تكون مستمرة عند النقطة 2.

الحل

ليكن $\varepsilon>0$

$$|f(x)-f(2)|=\left|\tfrac{1}{x}-2\right|=\left|\frac{2-x}{2x}\right|=\frac{|2-x|}{2x} \qquad (\text{لان } x>0)$$

إذا كان $|x-2|<1 \quad \Leftarrow \quad -1<x-2<1 \quad \Leftarrow \quad 1<x<3$

$$\Leftarrow \quad x>1 \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{x}<1 \quad \Leftarrow$$

$$\frac{|2-x|}{2x}<\frac{1}{2}|2-x|$$

نختار $\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$. الآن ليكن $x\in R^+$ بحيث أن $|x-2|<\delta$

$$\frac{1}{2}|x-2|<\varepsilon \Leftarrow \quad |x-2|<1 \text{ و } |x-2|<2\varepsilon \quad \Leftarrow$$

$$|f(x)-f(2)|<\frac{1}{2}|2-x|<\varepsilon$$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة 2.

مثال (5)

ليكن (R,d) فضاء متريا اعتياديا. برهن على أن الدالة $f:R\to R$ المعرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

مستمرة عند جميع نقاط R ماعدا النقطة 0.

الحل:

سنبرهن أولا في حالة $x>0$. ليكن $x_0 \in R$ بحيث $x_0 > 0 \Leftarrow f(x_0)=1$

ليكن $\varepsilon > 0$. حسب كثافة الأعداد النسبية يوجد $r \in R$ بحيث أن $0 < r < x_0$

نضع $\delta = x_0 - r$

$$\beta_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (r, 2x_0 - r)$$

بما أن $r > 0$

$$f(\beta_\delta(x_0)) = \{1\}$$

$$\beta_\varepsilon(f(x_0)) = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

بما أن $f(\beta_\delta(x_0) \subseteq \beta_\varepsilon(f(x_0)) \Leftarrow 1 \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

وبالمثل نبرهن في حالة $x<0$ ، (تلميح نضع $\delta = r - x_0$). وأخيرا نبرهن الدالة غير مستمرة عند النقطة 0 ، نبرهن على أنة يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن لكل $\delta > 0$ فان

$$f(\beta_\delta(0)) \not\subset \beta_\varepsilon(f(0))$$

نأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\beta_\varepsilon(f(0)) = (f(0) - \varepsilon, f(0) + \varepsilon) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

ليكن $\delta > 0$

$$\beta_\delta(0) = (-\delta, \delta)$$

$$f(\beta_\delta(0)) = f((-\delta, \delta)) = f((-\delta, 0)) \cup f(\{0\}) \cup f((0, \delta)) = \{-1, 0, 1\}$$

بما أن $f(\beta_\delta(0)) \not\subset \beta_\varepsilon(f(0)) \Leftarrow -1 \notin \beta_\varepsilon(f(0))$

$\Leftarrow f$ غير مستمرة عند النقطة 0.

مبرهنة (6)

ليكن كل من $(X, d_1), (Y, d_2)$ فضاء متريا ، ولتكن $f : X \to Y$ دالة فأن العبارات الآتية متكافئة

(1) الدالة f مستمرة

(2) إذا كانت G مجموعة مفتوحة في Y فأن المجموعة $f^{-1}(G)$ تكون مفتوحة في X

(3) إذا كانت H مجموعة مغلقة في Y فأن المجموعة $f^{-1}(H)$ تكون مغلقه في X

(4) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ لكل $A \subset X$

(5) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ لكل $B \subset Y$

(6) $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ لكل $B \subset Y$

البرهان:

$(2) \Leftarrow (1)$

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y. إذا كانت $f^{-1}(G) = \phi$ ينهي البرهان. أما إذا كانت $f^{-1}(G) \neq \phi$. ليكن $x \in f^{-1}(G) \Leftarrow f(x) \in G$

بما أن G مجموعة مفتوحة في $Y \Leftarrow$ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $\beta_\varepsilon(f(x_0)) \subset G$

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ f مستمرة في x

$\Leftarrow$ توجد كرة مفتوحة $\beta_\delta(x)$ في X بحيث أن $f(\beta_\delta(x)) \subset \beta_\varepsilon(f(x)) \subset G$.

$\Leftarrow$ $\beta_\delta(x) \subset f^{-1}(G)$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X .

$(3) \Leftarrow (2)$

لتكن H مجموعة مغلقة في $Y \Leftarrow$ المجموعة $H^c = Y \mid H$ مفتوحة في Y باستخدام (2) نحصل على المجموعة $f^{-1}(H^c)$ تكون مفتوحة في X .

ولكن $f^{-1}(H^c) = f^{-1}(Y \mid H) = X \mid f^{-1}(H)$

$\Leftarrow$ المجموعة $X \mid f^{-1}(H)$ مفتوحة في $X \Leftarrow$ المجموعة $f^{-1}(H)$ مغلقة في X

$(4) \Leftarrow (3)$

لتكن $A \subset X \Leftarrow$ المجموعة $\overline{f(A)}$ مغلقة في $Y \Leftarrow f(A) \subset Y$

باستخدام (3) نحصل على أن المجموعة $f^{-1}(\overline{f(A)})$ تكون مغلقة في X

بما أن $f(A) \subset \overline{f(A)} \Leftarrow f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Leftarrow A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$

بما إن $\overline{A}$ اصغر مجموعة مغلقة في X وتحتوي على $A \Leftarrow \overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$

$\Leftarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

$(5) \Leftarrow (4)$

لتكن $B \subset Y \Leftarrow f^{-1}(B) \subset X$

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$$

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$$

برهان $(5) \Leftarrow (6) \Leftarrow (1)$ يترك للقارئ

مبرهنة (7)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2),(Z,d_3)$ فضاءً متريا ً ولتكن كل من $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ دالة مستمرة فأن الدالة $g\circ f:X\to Z$ تكون مستمرة

البرهان:

لتكن G مجموعة مفتوحة في Z.

بما إن الدالة $g:Y\to Z$ مستمرة $\Leftarrow$ المجموعة $g^{-1}(G)$ تكون مفتوحة في Y

بما أن الدالة $f:X\to Y$ مستمرة$\Leftarrow$ المجموعة $f^{-1}\left(g^{-1}(G)\right)$ مفتوحة في X.

لكن $f^{-1}\left(g^{-1}(G)\right)=\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(G)=(g\circ f)^{-1}(G)$

$\Leftarrow$ المجموعة $(g\circ f)^{-1}(G)$ تكون مفتوحة في X,

$\Leftarrow g\circ f$ مستمرة

مثال (8)

ليكن كل$(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ولتكن $f:X\to Y$ دالة. برهن على أن

(1) إذا كانت الدالة f ثابتة فأنها مستمرة

(2) إذا كانت الفضاء المتري (X,d_1) مبعثر فان f مستمرة

(3) إذا كانت الفضاء المتري (Y,d_2) متماسك فأن f مستمرة

الحل

(1) بما أن الدالة f ثابتة$\Leftarrow$يوجد $b\in Y$بحيث أن $f(x)=b$ لكل $x\in x$

نفرض G مجموعة مفتوحة في Y

$$f^{-1}(G)=\begin{cases}\phi, & b\notin G\\ X, & b\in G\end{cases}$$

بما أن كل من X,ϕ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في $X\Leftarrow f$ مستمرة

(2)

لتكن G مجموعة مفتوحة في $Y\Leftarrow f^{-1}(G)\subseteq X$

بما أن (X,d_1)مبعثر $\Leftarrow f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في $X\Leftarrow f$ مستمرة

(3)

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y

بما أن (Y,d_2) متماسك $\Leftarrow$ أما $G=\phi$ أو $G=Y$
أما $f^{-1}(G)=\phi$ أو $f^{-1}(G)=X$
بما أن كل من X,ϕ مجموعة مفتوحة في X
$\Leftarrow f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X
$\Leftarrow f$ مستمرة

مبرهنة (9)
ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة. أذا كان (Z,d_Z)فضاءَ جزئيا من الفضاء المتري (X,d_1) فأن f_Z مقصور الدالة f على Z تكون مستمرة

البرهان
بما أن الدالة $f_Z:Z\to Y$ هي مقصور الدالة f على Z
$\Leftarrow f_Z(x)=f(x)$ لكل $x\in Z$
لتكن G مجموعة مفتوحة في Y
بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X
$\Leftarrow Z\cap f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في Z أي أن $Z\cap f^{-1}(G)\in\tau_Z$
بما أن $f_Z^{-1}(G)=Z\cap f^{-1}(G)$ حسب تعريف f_Z
$\Leftarrow$ المجموعة $f_Z^{-1}(G)$ مفتوحة في Z $\Leftarrow f_Z$ مستمرة.

الاستمرارية التتابعية Sequentially Continuity

تعريف (10)
ليكن كل من$(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا . يقال عن الدالة$f:X\to Y$ بأنها مستمرة تتابعينا (**Sequentially Continuity**) عند النقطة $x_0\in X$ إذا كانت كل متتابعة $\{x_n\}$في X بحيث أن $x_n\to x_0$ فان $f(x_n)\to f(x_0)$ في Y

مبرهنة(11)
ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا . فان الدالة$f:X\to Y$ مستمرة عند النقطة $x_0\in X$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة تتابعينا عند تلك النقطة.

البرهان

نفرض الدالة f مستمرة في النقطة x_0 .ولتكن$\{x_n\}$ متتابعة في X بحيث أن $x_n \to x_0$.
يجب أن نبرهن أن $f(x_n) \to f(x_0)$
ليكن $\varepsilon > 0$ ،بما أن f مستمرة في النقطة x_0 $\Leftarrow$ يوجد $\delta > 0$ بحيث لكل $x \in X$

$$d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad d_1(x, x_0) < \delta$$

بما أن $x_n \to x_0$, $\delta > 0$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن

$$n > k \text{ لكل } d_1(x_n, x_0) < \delta$$

وعليه فأن $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ لكل $n > k$. ومن ذلك ينتج أن $f(x_n) \to f(x_0)$ ،
وهذا يعني أن الدالة f مستمرة تتابعينا عند النقطة $x_0 \in X$.
وبالعكس .نفرض أن الدالة f مستمرة تتابعينا عند النقطة $x_0 \in X$. ونبرهن أن f مستمرة في النقطة x_0 . سنبرهن بطريقة التناقض. نفرض أن f غير مستمرة عند النقطة x_0 .
$\Leftarrow$ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث لكل $\delta > 0$ يوجد $x \in X$ وان

$$d_2(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon \quad \Leftarrow d_1(x, x_0) < \delta$$

$\Leftarrow$ لكل $n \in Z^+$ يوجد $x_n \in X$ بحيث آن

$$d_2(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon \quad \Leftarrow d_1(x, x_0) < \frac{1}{n}$$

وهذا يعني أن $x_n \to x_0$ في X ولكن $f(x_n) \not\to f(x_0)$ في Y
وهذا تناقض $\Leftarrow$ f مستمرة في النقطة x_0 .

مثال(12)

ليكن (R,d) فضاء متريا اعتياديا. برهن على أن الدالة $f : R \to R$ المعرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

غير مستمرة عند النقطة 0.

الحل:

نأخذ $x_n = \frac{1}{n}$ $\Leftarrow$ المتتابعة $\{x_n\}$ في R وان $x_n \to 0$

بما أن $\frac{1}{n} > 0$ لكل $n \in Z^+$ $\Leftarrow$ $f(\frac{1}{n}) = 1$ $\Leftarrow$ $f(x_n) = 1$

$\Leftarrow$ $f(x_n) \to 1$ $\Leftarrow$ $f(x_n) \not\to f(0) = 0$

$\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة عند النقطة 0.

مثال(13)

ليكن (R,d) فضاء متريا اعتياديا. برهن على أن الدالة $f:[a,b]\to R$ المعرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\cap[a,b]\\ 2, & x\in[a,b],\ x\notin Q\end{cases}$$

غير مستمرة عند جميع نقاط الفترة $[a,b]$ حيث Q تمثل مجموعة الأعداد النسبية.

الحل:

ليكن $x\in[a,b]$

(1) إذا x عددا نسبيا فان $f(x)=1$

توجد متتابعة $\{x_n\}$ من الأعداد غبر النسبية في $[a,b]$ بحيث $x_n\to x$

بما أن x_n عدد غير نسبي لكل $n\in Z^+$ $\Leftarrow$ $f(x_n)=2$ لكل $n\in Z^+$

$\Leftarrow$ $f(x_n)\not\to 1$ ، أي أن $f(x_n)\not\to f(x)$ $\Leftarrow$

الدالة f غير مستمرة عند النقطة x $\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة عند كل عدد نسيبي في $[a,b]$

(2) إذا x عددا غير نسبيا فان $f(x)=2$

توجد متتابعة $\{x_n\}$من الأعداد النسبية في $[a,b]$ بحيث $x_n\to x$

بما أن x_n عدد نسبي لكل $n\in Z^+$ $\Leftarrow$ $f(x_n)=1$ لكل $n\in Z^+$

$\Leftarrow$ $f(x_n)\not\to 2$ ، أي أن $f(x_n)\not\to f(x)$ $\Leftarrow$

الدالة f غير مستمرة عند النقطة x $\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة عند كل عدد غير نسيبي في $[a,b]$

$\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة عند جميع نقاط الفترة $[a,b]$

مبرهنة(14)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية في X.

إذا كانت كل من $f:X\to Y,\ g:X\to Y$ دالة مستمرة بحيث أن $f(x)=g(x)$ لكل $x\in A$ فان $f(x)=g(x)$ لكل $x\in\overline{A}$

البرهان:

ليكن $x\in\overline{A}$

$\Leftarrow$ توجد متتابعة $\{x_n\}$ في A بحيث أن $x_n\to x$

بما أن كل من $f:X\to Y,\ g:X\to Y$ دالة مستمرة

$f(x_n)\to f(x),\quad g(x_n)\to g(x)$ $\Leftarrow$

بما أن $x_n\in A$ لكل $n\in Z^+$ $\Leftarrow$ $f(x_n)=g(x_n)$ لكل $n\in Z^+$

$\Leftarrow$ كل من $\{f(x_n)\},\{g(x_n)\}$ متتابعة واحدة (أي نفس المتتابعة)

بما أن التقارب وحيد $\Leftarrow$ $f(x)=g(x)$ وعلية فان $f(x)=g(x)$ لكل $x\in \overline{A}$

الاستمرارية المنتظمة Uniform Continuity

تعريف (15)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا. يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها مستمرة بانتظام (**Uniform Continuous**) على X إذا تحقق الشرط الأتي : لكل $\varepsilon>0$ ، يوجد $\delta>0$ بحيث أن لكل $x,y\in X$ فان

$$d_2(f(x),f(y))<\varepsilon \quad \Leftarrow \quad d_1(x,y)<\delta$$

مبرهنة (16)

كل دالة مستمرة بانتظام تكون مستمرة والعكس غير صحيح دائما.

البرهان:

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ، ولتكن الدالة $f:X\to Y$ مستمرة بانتظام .

ليكن $x_0\in X$ ، يجب أن نبرهن على أن الدالة f تكون مستمرة عند النقطة x_0

ليكن $\varepsilon>0$

بما أن الدالة f مستمرة بانتظام $\Leftarrow$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن لكل $x,y\in X$ فان

$$d_2(f(x),f(y))<\varepsilon \quad \Leftarrow \quad d_1(x,y)<\delta$$

بما أن $x_0\in X$ $\Leftarrow$ لكل $x\in X$ فان $d_1(x,x_0)<\delta$ يؤدي إلى $d_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 وعلية الدالة f مستمرة لان النقطة x_0 لاعلى التعين في X

والمثال التالي يوضح العكس غير صحيح دائما

مثال (17)

ليكن (R,d) فضاء متريا اعتياديا ولتكن الدالة $f:R\to R$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^2$ $x\in R$ فأنها مستمرة (راجع المثال (3)) ولكنها ليست مستمرة بانتظام كما في البرهان الأتي :

سوف نبرهن يوجد $\varepsilon>0$ بحيث لكل $\delta>0$ يوجد $x,y\in R$ وان

$$|f(x)-f(y)|>\varepsilon \text{ يودي إلى } |x-y|<\delta$$

ليكن $\delta>0$ ، باستخدام خاصية ارخميدس يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $\frac{1}{k}<\delta$

نضع $x=k,\quad y=k+\frac{1}{k}$ $\Leftarrow$ $|x-y|=\frac{1}{k}<\delta$ ولكن $|f(x)-f(y)|=2+\frac{1}{k^2}>2$

$\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة بانتظام .

الدوال ذات القيم الحقيقية Real-Valued Functions

الدوال التي مستقرها مجموعه جزئية من مجموعة الإعداد الحقيقية تسمى بالدوال ذات القيم الحقيقية. سوف نرمز للدوال ذات القيم الحقيقية والمعرفة على المجموعة X بالرمز $RV(X)$، أي أن

$$RV(X)=\{f : X \to R, \text{ دالة } f\}$$

في هذا البند سوف نتطرق الدوال المستمرة والمعرفة من الفضاء المتري (X,d) إلى الفضاء المتري الاعتيادي (R,d_u) ونرمز لمجموعة هذه الدوال بالرمز $C(X)$.

تعريف (18)

ليكن $\lambda \in R, f,g \in RV(X)$ نعرف $|f|, \frac{f}{g}, fg, \lambda f, f+g$ كالأتي

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x)\neq 0, \quad \forall x \in X$$
$$|f|(x)=|f(x)|$$

مبرهنة (19)

إذا كانت $\lambda \in R, f,g \in C(X)$ فان

(1) $f+g \in C(X)$

(2) $\lambda f \in C(X)$

(3) $fg \in C(X)$

(4) $\frac{f}{g} \in C(X)$ عندما $g(x)\neq o$ لكل $x \in X$

(5) $|f| \in C(X)$

البرهان:

لتكن $x_0 \in X$ وليكن $\varepsilon > 0$

بما أن $f,g \in C(X) \Leftarrow$ كل من $f : X \to R$, $g : X \to R$ دالة مستمرة $\Leftarrow$ كل من f, g مستمرة عند النقطة x_0

بما أن الدالة $f:X\to R$ مستمرة عند النقطة x_0 $\Leftarrow$ يوجد $\delta_1>0$ بحيث أن لكل $x\in X$ فان $d(x,x_0)<\delta_1$ يؤدي إلى $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\in}{2}$

وكذلك الدالة $g:X\to R$ مستمرة عند النقطة x_0 $\Leftarrow$ يوجد جوار $\delta_2>0$ بحيث أن لكل $x\in X$ فان $d(x,x_0)<\delta_2$ يؤدي إلى $|g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

نضع $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ $\Leftarrow$ $\delta>0$

لكل $x\in X$ فان $d(x,x_0)<\delta$

$$(f+g)(x)-(f+g)(x_0)=(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))=(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))$$

$$|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)|=|(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))|\le|f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

$\Leftarrow$ الدالة $f+g$ مستمرة عند النقطة x_0 وعليه مستمرة في جميع نقاط X

$\Leftarrow f+g\in C(X)$ وبالمثل نبرهن (2),(3),(4),(5).

ملاحظه

من المبرهنة أعلاه نستنتج على أن كل دالة متعددة حدود P حيث

$$p(x)=a_\circ+a,x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

تكون دالة مستمرة

القيدية Boundenes

ليكن (X,d) فضاء متري . ولتكن $A\subseteq X$.قطر المجموعة A (كما في التعريف) يعرف بالصيغة

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$$

نلاحظ أن المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة من الأسفل لان $d(x,y)\ge0$ لكل $x,y\in X$. لكي تكون المجموعة B مقيدة يجب أن تكون مقيدة من الأعلى

تعريف (20)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$.يقال عن المجموعة A بأنها مقيدة **(**Bounded**)** في X إذا كانت $\delta(A)<\infty$.بعبارة أخرى إذا كانت المجموعة

$$B=\{d(x,y):x,y\in A\}$$

مقيدة في R . وبصورة خاصة يقال عن X بأنه فضاء مقيد **(**Bounded Space**)** إذا كانت $\delta(X)<\infty$.

مبرهنة (21)

لتكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$.فان المجموعة A تكون مقيدة في X إذا وفقط إذا كان لكل $x_0\in A$ يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $d(x,x_0)<k$ لكل $x\in A$.

البرهان :

نفرض المجموعة A مقيدة $\Leftarrow \delta(A)<\infty \Leftarrow$ المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$

مقيدة في $R \Leftarrow$ يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $|\lambda|<k$ لكل $\lambda\in B$

$\Leftarrow |d(x,y)|<k$ لكل $x,y\in A$

بما أن $d(x,y)\geq 0$ لكل $x,y\in X$

$\Leftarrow d(x,y)<k$ لكل $x,y\in A$

وبصورة خاصة لكل $d(x,x_0)<k$ لكل $x\in A$

الاتجاه الأخر.

نفرض لكل $x_0\in A$ يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $d(x,x_0)<k$ لكل $x\in A$.

ليكن $x,y\in A \Leftarrow d(x,y)<k, d(x,x_0)<k$

$$d(x,y)\leq d(x,x_0)+d(y,x_0)<k+k=2k$$

$\Leftarrow$المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة في $R \Leftarrow$ المجموعة A مقيدة

نتيجة (22)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$.فان A تكون مقيدة في X إذا وفقط إذا يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $d(x,y)<k$ لكل $x,y\in A$.

مثال (23)

في الفضاء المتري الاعتيادي (R,d).

(1) كل من الفترات $A_1=(a,b), A_2=(a,b], A_3=[a,b), A_4=[a,b]$ تكون مقيدة لان $\delta(A_i)=b-a$ لكل $i=1,2,3,4$

(2) الفضاء R غي مقيد لان $\delta(R)=\infty$.

.

مثال(24)

في الفضاء المتري المتغير (X,d)

(1) X مجموعة مقيدة لان $\delta(X)=1$

(2) إذا كانت $x_0 \in X$ وكانت $A=\{x\in X : d(x,x_0)<\frac{1}{2}\}$ فان $\delta(A)=0 \Leftarrow$ قطر المجموعة A يساوي صفر

نلاحظ أن المجموعة A عبارة عن كرة مركزها x_0 ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ وهذا يعني أن قطر الكرة لايساوي ضعف نصف قطرها.

تعريف (25)

ليكن (X,d) فضاء متريا وليكن (R,d_u) فضاءً متريا اعتياديا. يقال عن الدالة $f:X\to R$ بأنها مقيدة (**Bounded**) إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|f(x)|\le M$ لكل $x\in X$.

بعبارة أخرى إذا كان مستقر الدالة f مجموعه مقيدة في R ، أي أن المجموعة $f(X)=\{f(x):x\in X\}$ مجموعه مقيدة في R

خاصية القيمة المتوسطة Intermediate Value Property

تعريف (26)

ليكن (R,d_u) فضاءً متريا اعتياديا . يقال عن الدالة $f:[a,b]\to R$ بأنها تحقق خاصية القيمة المتوسطة (**Intermediate value property**) إذا كان لكل $x,y\in[a,b]$ ولكل s يقع بين $f(x), f(y)$ يوجد z بين x,y ، بحيث أن $f(z)=s$.

مثال (27)

ليكن (R,d_u) فضاءً متريا اعتياديا ولتكن الدالة $f:[a,b]\to R$ معرفة بالصيغة $f(x)=x$ لكل $x\in[a,b]$ فان الدالة تحقق خاصية القيمة المتوسطة

الحل :

ليكن $x,y\in[a,b]$ بحيث أن $x<y$ وليكن s يقع بين $f(x), f(y)$ ، أي أن $f(x)<s<f(y)$

بما أن $f(x)=x$ لكل $x\in[a,b] \Leftarrow x<s<y$

بما أن $f(s)=s \Leftarrow f$ تحقق خاصية القيمة المتوسطة

المبرهنة التالية تبين أن الدالة المستمرة تحقق خاصية القيمة المتوسطة على كل فترة مغلقة في منطلقها .

مبرهنة (28) مبرهنة القيمة المتوسطة (Intermediate value theorem)

ليكن (R,d_u) فضاءً متريا اعتياديا . إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to R$ مستمرة فان لكل عدد حقيقي s يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد z في الفترة $[a,b]$ بحيث أن $f(z)=s$.

البرهان :

لتكن s يقع بين $f(a)$ و $f(b)$

(1) إذا كانت $f(a)<f(b)$ فان $f(a)<s<f(b)$ ، لتكن $\mathrm{I}=[a,b]$ ، $m=\dfrac{a+b}{2}$

إذا كان $f(m)=s$ ، ففي هذه الحالة يكون $z=m$ وينتهي البرهان ، أما إذا كانت $f(m)\neq s$ فانه أما $f(m)>s$ أو $f(m)<s$

- إذا كانت $f(m)<s$ ، نضع $\mathrm{I}_1=[a_1,b_1]=[m,b]$

$$f(a_1)=f(m)<s<f(b)=f(b_1)$$
$$f(a_1)<s<f(b_1)$$
$$|\mathrm{I}_1|=b-m=b-\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}|\mathrm{I}|$$

أما إذا كانت $f(m)>s$ ، نضع $\mathrm{I}_1=[a_1,b_1]=[a,m]$

$$f(a_1)=f(a)<s<f(m)=f(b_1)$$
$$f(a_1)<s<f(b_1)$$
$$|\mathrm{I}_1|=m-a=\frac{a+b}{2}-a=\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}|\mathrm{I}|$$

ونفس الطريقة ، إذا كانت $m_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$

- إذا كانت $f(m_1)<s$ ، نضع $\mathrm{I}_2=[a_2,b_2]=[m_1,b_1]$

$$f(a_2)=f(m_1)<s<f(b_1)=f(b_2)$$
$$f(a_2)<s<f(b_2)$$
$$|\mathrm{I}_2|=b_1-m_1=b_1-\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{2}|\mathrm{I}_1|=\frac{1}{2^2}|\mathrm{I}|$$

أما إذا كانت $f(m_1)>s$ ، نضع $\mathrm{I}_2=[a_2,b_2]=[a_1,m_1]$

$$f(a_2)=f(a_1)<s<f(m_1)=f(b_2)$$
$$f(a_2)<s<f(b_2)$$
$$|\mathrm{I}_2|=m_1-a_1=\frac{a_1+b_1}{2}-a_1=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{2}|\mathrm{I}_1|=\frac{1}{2^2}|\mathrm{I}|$$

وبصورة عامة وباستخدام الاستقراء الرياضي نحصل على متتابعة من الفترات المغلقة $\mathrm{I}_n = [a_n, b_n]$ بحيث أن $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I}_{n-1}$ لكل $n > 1$ وان $f(a_n) < s < f(b_n)$ لكل $n \in Z^+$ وأيضا $|\mathrm{I}_n| = \frac{|\mathrm{I}|}{2^{n-1}}$

بما أن $|\mathrm{I}_n| \to 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{|\mathrm{I}|}{2^{n-1}} \to 0$

باستخدام مبرهنة كانتور على الفترات المعشعشة ، يوجد $z \in [a,b]$ بحيث أن $\bigcap_{n \in Z^+} \mathrm{I}_n = \{x\}$

الآن : يجب أن نبرهن على أن $f(z) = s$

نبرهن $a_n \to z$ و $b_n \to z$

لكل $\varepsilon > 0$ حسب خاصية ارخميدس يوجد $k \in Z^+$ ، $k > 1$ بحيث

$$|\mathrm{I}_n| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |\mathrm{I}_n| = \frac{|\mathrm{I}|}{2^{n-1}} \varepsilon \quad \Leftarrow \quad |\mathrm{I}| < \varepsilon \le 2^{k-1}\varepsilon$$

بما أن $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I}_{n-1}$ لكل $n > 1 \quad \Leftarrow \quad a_n, b_n \in \mathrm{I}_k$ لكل $n > k$

بما أن $z \in \mathrm{I}_k$

$$|a_n - z| \le |\mathrm{I}_k| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |b_n - z| \le |\mathrm{I}_k| < \varepsilon \quad \text{لكل } n > k$$

$$\Leftarrow \quad a_n \to z \quad \text{و} \quad b_n \to z$$

بما أن f مستمرة $\Leftarrow$ f مستمرة عند z

$$\Leftarrow \quad f(a_n) \to f(z) \quad \text{و} \quad f(b_n) \to f(z)$$

$$\text{بما أن } f(a_n) < s < f(b_n) \quad \Rightarrow \quad f(z) < s < f(z) \quad \Leftarrow \quad f(z) = s$$

(2)

وبنفس طريقة (1) نبرهن إذا كان $f(b) < s < f(a)$ وعلية في الحالتين (1) ، (2) يوجد z في الفترة $[a,b]$ بحيث أن $f(z) = s$.

ملاحظة

ليكن (R, d_u) فضاءً متريا اعتياديا . إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to R$ تحقق خاصية القيمة المتوسطة فليس بالضروري أن تكون مستمرة . والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال(29)

ليكن (R, d_u) فضاءً متريا اعتياديا. إذا كانت الدالة $f : [0,1] \to R$ معرفة كالأتي:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

فإنها تحقق خاصية القيمة المتوسطة ولكنها غير مستمرة .