هنالك تطبيقات لمبرهنة القيمة المتوسطة وسنذكر منها في الأمثلة التالية

مثال (30)

ليكن (R,d_u) فضاءَ متريا اعتياديا.

(1) إذا كانت الدالة $f:R\to R$ مستمرة بحيث أن $f(-x)=-f(x)$ لكل $x\in R$ ، فأنة يوجد $x_0\in R$ بحيث أن $f(x_0)=0$

(2) إذا كانت $p:R\to R$ دالة متعددة حدود من درجة فردية. فان $p(x)=0$ لها جذر حقيقي واحد على الأقل.

المصادر

[1] عادل غسان نعوم،"**مقدمة في التحليل الرياضي**"، جامعة بغداد – العراق 1986.

[2] Apostol, " Mathematical Analysis"**,2 nd, 1974**

[3] Ash, R. B., " Real Analysis And Probability"**, 1972.**

[4] Billingsley, P., " Probability And Measure " **, 1979.**

[5] Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.," Real Variables" **, 1969.**

[6] Edwin Hewitt Karl Stromberg, " Real And Abstract Analysis" **, 1978**

[7] Folland . G. B.," Real Analysis"**,2 nd, 1999**

[8] Goldberg, R. R.," Methods Of Real Analysis"**,1979.**

[9] Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.," Introductory Real Analysis",**1970.**

[10] Royden, H. L.," Real Analysis",**1988**

[11] Rudin, W., " Principles Of Mathematical Analysis",**1953**

[12] Rudin, W., " Real And Complex Analysis",**19**

[13] Ruel V. Churchill James W. Brown Roger F. Verhey," Complex Variables And Applications",**3 rd, 1974.**

[14] Scott, D. B., And Tims, S. R.," Mathematical Analysis An Introduction",**1966.**

[15] Sharma, J. N And Vasishtha, A. R.," Real Analysis",**5 th, 1977.**

[16] Walter Rudin," Principles Of Mathematical Analysis",**2 nd, 1964.**

[17] Walter Rudin," Real And Complex Analysis",**2 nd, 1974.**

[18] Walter Rudin," Principles Of Mathematical Analysis",**3 rd, 1986.**

محاضرات
الأستاذ المساعد الدكتور نوري فرحان المياحي
قسم الرياضيات – كلية علوم الحاسوب والرياضيات – جامعة القادسية – العراق

ر331
التحليل الرياضي (1) Mathematical Analysis I

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

المحاضرة التاسعة
التراص Compactness

تعريف (1)

لتكن $F=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ عائلة من المجموعات الجزئية من المجموعة X ولتكن $A\subseteq X$.يقال عن F بأنها غطاء (covering) للمجموعة A إذا كان $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. بالإضافة إلى ذلك إذا كانت المجموعة الدليلية Λ مجموعة منتهية فأن F يكون غطاء منتهياً للمجموعة A . وطبعاً إذا كانت $A=X$ فأن F يكون غطاء للمجموعة X إذا كان $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$

مثال (2)

لتكن $X=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2\}$

(1) العائلة $\{\{1\},\{2,3\}\}$ تمثل غطاء إلى A لأن $A\subseteq\{1\}\cup\{2,3\}\Leftarrow\{1\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$ وان هذا الغطاء منتهي.

(2) العائلة $\{\{2\},\{4,5\}\}$ لا تمثل غطاء إلى A لأن $A\not\subseteq\{2\}\cup\{4,5\}$

(3)العائلة $\{\{1,2\},\{3,4\},\{1,3,5\}\}$ تمثل غطاء إلى A وغطاء إلى X

مثال (3)

(1) العائلة $\left\{\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]:n\in Z^+\right\}$ $F=$ تمثل غطاء غير منتهي إلى المجموعة $A=(0,1)$

(2) العائلة $\{(n,n+3):n\in Z\}$ $F=$ تمثل غطاء غير منتهي إلى R

(3) العائلة $\{(n,n+1):n\in Z\}$ $F=$ لا تمثل غطاء إلى R .

تعريف (4)

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة X وليكن كل من $F=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ و $G=\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda'}$ غطاء إلى المجموعة A يقال عن F بأنه غطاء جزئي (**Subcover**) من G إذا كان لكل $\lambda\in\Lambda$ يوجد $\gamma\in\Lambda'$ بحيث $A_\lambda=B_\gamma$ ، بعبارة أخرى إذا كانت F عائلة جزئية من G .

مثال (5)

كل من $G=\{(r,r+3): r\in R\}, F=\{(n,n+3), n\in Z\}$ غطاء إلى R وان F عائلة جزئية من G

تعريف (6)

لتكن A مجموعة جزية من الفضاء المتري (X,d) وليكن $F=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء إلى لمجموعة A. يقال عن F بأنها غطاء مفتوح (**Open Cover**) إذا كانت A_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda$

مثال (7)

في الفضاء المتري الاعتيادي (R,τ_u) نبرهن على أن العائلة

$F=\left\{\left(\frac{1}{n},2\right): n\in Z^+\right\}$ تكون غطاء مفتوح إلى المجوعة $A=(0,1)$

الحل:

ليكن $x\in A \Leftarrow 0<x<1$

بما أن $x>0$ حسب خاصية ارخميدس . يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $\frac{1}{k}<x$

بما أن $x<1 \Leftarrow x<2 \Leftarrow \frac{1}{k}<x<2 \Leftarrow x\in(\frac{1}{k},2) \Leftarrow x\in\bigcup_{n\in Z^+}(\frac{1}{n},2)$

$\Leftarrow A\subset\bigcup_{n\in Z^+}(\frac{1}{n},2) \Leftarrow F$ غطاء إلى المجموعة A

بما أن $(\frac{1}{n},2)$ مجموعة مفتوحة لكل $n\in Z^+ \Leftarrow F$ غطاء مفتوح إلى A

مثال (8)

في الفضاء المتري الاعتيادي (R,τ_u) كل من

$$F_1=\{(-n,n): n\in Z^+\},\quad F_2=\{(-3n,3n): n\in Z^+\},\quad F_3=\{(2n-1,2n+1),(2n,2n+2): n\in Z^+\}$$

تكون غطاء مفتوح إلى R وكذلك F_2 غطاء جزئي من F_1

مثال (9)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن $A\subseteq X$ برهن على أن $F=\{\{x\}: x\in A\}$ يكون غطاء مفتوح إلى A

الحل:

بما أن $A=\bigcup_{x\in A}\{x\}\Leftarrow F$ غطاء إلى المجموعة A

بما أن (X,d) فضاء متري مبعثر $\Leftarrow \{x\}$ مجموعة مفتوحة في X لكل $x\in X$

$\Leftarrow F$ غطاء مفتوح إلى المجموعة A

تعريف (10)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن A بأنها مجموعة مرصوصة (Compact Set) في X إذا كان كل غطاء مفتوح إلى A يحتوي (يمتلك) غطاء جزئي منتهي . بعبارة أخرى إذا كانت $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\wedge}A_\lambda$ وكانت A_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda$

فأنه توجد $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ في Λ بحيث أن $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_{\lambda_i}$.

وبصورة خاصة يقال عن X بأنة فضاء مرصوص (Compact Space) إذا كان كل غطاء مفتوح إلى X فأنه يحتوي على غطاء جزئي منتهي.

مثال (11)

في الفضاء المتري الاعتيادي (R,d_u)

(1) المجموعة $A=(0,1)$ غير مرصوصة في R

(2) المجموعة $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots,0\right\}$ مرصوصة في R

(3) الفضاء R غير مرصوص

الحل :

(1)

نأخذ $F=\left\{(\frac{1}{n},2):n\in Z^+\right\}\Leftarrow F$ غطاء مفتوح إلى A ولكن لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي $\Leftarrow A$ مجموعة غير مرصوصة

(2)

ليكن $F=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة A

$\Leftarrow A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda,\quad A_\lambda\in\tau_u$ لكل $\lambda\in\Lambda$

بما أن $0\in A\Leftarrow$ يوجد $\lambda_0\in\Lambda$ بحيث أن $0\in A_{\lambda_0}$

بما أن A_{λ_0} مجموعة مفتوحة في R , $0\in A_{\lambda_0}\Leftarrow$ يوجد $r>0$ بحيث أن

$B_r(0)=(-r,r)\subset A_{\lambda_0}$

بما أن $r>0$ فحسب خاصية ارخميدس يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $\frac{1}{k}<r$

$\Leftarrow r < \frac{1}{n} < r$ لكل $n \geq k$

A_{λ_0} تحتوي على جميع عناصر A ماعدا (من المحتمل) العناصر $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}$

ألان لكل من هذه العناصر $\frac{1}{i}$ حيث $i = 1,2,\cdots,k-1$ يوجد $A_{\lambda_{C_i}}$ بحيث أن $\frac{1}{i} \in A_{\lambda_i}$

$\Leftarrow \{A_{\lambda_0}, A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_{K-1}}\}$ غطاء جزئي منتهي من الغطاء F إلى A

(3)

نأخذ $F = \{(-n,n) : n \in Z^+\} \Leftarrow$ غطاء مفتوح إلى R

سنبرهن بطريقة التناقض على أن F لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي

نفرض $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_k}\} \Leftarrow$ غطاء جزئي منتهي إلى F لكل $r = 1,2,\ldots,k$ $G_{n_r} = (-n_r, n_r)$

نضع $n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \Leftarrow$ لكل $r = 1,2,\cdots,k$ $n_0 \notin G_{n_r}$

ولكن $n_0 \in R \Leftarrow \{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_k}\}$ ليس غطاء إلى R . وهذا تناقض

$\Leftarrow F$ لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي وعلية R ليس فضاء مرصوص

مثال (12)

كل فضاء متري متماسك يكون متراص لأن الغطاء المفتوح الوحيد إلى X هو $\{X\}$

مبرهنة (13)

كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مرصوصة

البرهان:

لتكن A مجموعة منتهية في الفضاء المتري $(X,d) \Leftarrow A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

ليكن $F = \{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في X

$\Leftarrow A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, G_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda \in \Lambda$

بما أن $a_i \in A$ لكل $i = 1,2,\cdots,n$

$\Leftarrow a_i \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ لكل $i = 1,2,\cdots,n$

$\Leftarrow$ لكل i توجد $\lambda_i \in \Lambda$ بحيث أن $a_i \in G_{\lambda_i}$

$\Leftarrow \{G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \ldots, G_{\lambda_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من F إلى A

$A \Leftarrow$ مجموعة مرصوصة

مثال (14)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر، فأن X يكون مرصوص إذا وفقط إذا كانت X منتهية

الحل:
نفرض (X,d) فضاء مرصوص . سنبرهن بطريقة التناقض على أن X مجموعة منتهية
نفرض X مجموعة غير منتهية .بما أن (X,d) فضاء متري مبعثر
$\Leftarrow$ $F=\{\{x\}: x\in X\}$ غطاء مفتوح إلى X
ولكن هذا الغطاء لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي لأن X مجموعة غير منتهية .أذن X غير مرصوصة وهذا تناقض. إذن يجب أن تكون X منتهية
الاتجاه الآخر. نفرض X مجموعة منتهية $\Leftarrow$ X فضاء مرصوص حسب مبرهنة (13)

مبرهنة (15)
ليكن (Y,d_Y) فضاء جزئياً من الفضاء المتري (X,d) ولتكن $A\subset Y$ ، فأن المجموعة A تكون مرصوصة في X إذا وفقط إذا كانت مرصوصة في Y.
البرهان
نفرض المجموعة A مرصوصة في X
ليكن $G=\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في Y
$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$, V_λ مجموعة مفتوحة في Y لكل $\lambda\in\Lambda$
$\Leftarrow$ توجد G_λ مجموعة مفتوحة في X بحيث أن $V_\lambda=G_\lambda\cap Y$ لكل $\lambda\in\Lambda$
$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\Leftarrow F=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في X

بما أن المجموعة A مرصوصة في X $\Leftarrow$ توجد $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\Lambda$ بحيث أن $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}$

بما آن $A\subset Y$ $\Leftarrow$ $A\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}\right)\cap Y\Leftarrow A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(G_{\lambda_i}\cap Y)$

$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_{\lambda_i}$ $\Leftarrow$ المجموعة A مرصوصة في Y

الاتجاه الآخر. نفرض المجموعة A مرصوصة في Y
لتكن $F=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في X
$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$, G_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda$
$\Leftarrow$ $G_\lambda\cap Y$ مجموعة مفتوحة في Y لكل $\lambda\in\Lambda$
بما أن $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$, $A\subseteq Y\Leftarrow A\subseteq\left(\bigcup_{\lambda\Lambda}G_\lambda\right)\cap Y$
$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda\cap Y)\Leftarrow A\subseteq\{G_\lambda\cap Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في Y
بما أن المجموعة A مرصوصة في Y $\Leftarrow$ توجد $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\Lambda$ بحيث أن

$$A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}\quad\Leftarrow A\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_{ui}}\right)\cap Y\Leftarrow A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left(G_{\lambda_i}\cap Y\right)$$

$\Leftarrow$ $\{G_{\lambda_1},G_{\lambda_2},\ldots,G_{\lambda_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من الغطاء F إلى A في X

$\Leftarrow$ المجموعة A مرصوصة في X.

ملاحظة

استناداً إلى المبرهنة أعلاه. المجموعة الجزئية Y من الفضاء المتري X تكون مرصوصة في X إذا فقط إذا كانت Y فضاء مرصوص بالنسبة للفضاء النسبي τ_Y على Y. وعليه التراص ليس خاصية نسبيه (**Relative Property**)

مبرهنة (16)

كل مجموعة مغلقة في فضاء متري مرصوص تكون مرصوصة

البرهان

لتكن A مجموعة مغلقة في الفضاء المتري المرصوص (X,d). يجب أن نبرهن على أن A مجموعة مرصوصة. ليكن $F=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة A في X

$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$, G_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda$

بما أن A مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ A^c مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $F'=A^c\cup\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة $A\cup A^c$

ولكن $X=A\cup A^c$ $\Leftarrow$ F' غطاء مفتوح إلى X

بما أن X فضاء مرصوص $\Leftarrow$ يوجد $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\Lambda$ بحيث أن $X=A^c\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}\right)$

بما أن $A\subseteq X$ $\Leftarrow$ $A\subseteq A^c\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}\right)$

بما أن $A\cap A^c=\phi$ $\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}\Leftarrow\{G_{\lambda_1},G_{\lambda_2},\ldots,G_{\lambda_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من الغطاء F

إلى A. $\Leftarrow$ A مجموعة مرصوصة في X

مبرهنة (17)

كل مجموعة مرصوصة في فضاء متري تكون مغلقة ومقيدة

البرهان

لتكن A مجموعة مرصوصة في الفضاء المتري (X,d). يجب أن نبرهن على أن المجموعة A مغلقة ومقيدة في X.

سنبرهن بطريقة التناقض. نفرض المجموعة A لبست مغلقة $\Leftarrow$ $A'\not\subset A$ $\Leftarrow$ يوجد $x\in A'$ بحيث أن $x\notin A$ $\Leftarrow$ لكل مجموعة مفتوحة G في X بحيث $x\in G$ فان $A\cap(G\setminus\{x\})\neq\phi$

بما أن كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$ لكل $n \in Z^+$ فان $A \cap (\beta_{\frac{1}{n}}(x) \mid \{x\}) \neq \phi$

بما أن $\beta_{\frac{1}{n}}(x) = \{y \in X : d(x,y) < \frac{1}{n}\}$, $\overline{\beta_{\frac{1}{n}}(x)} = \{y \in X : d(x,y) \leq \frac{1}{n}\}$ فان

$A \cap (\overline{\beta_{\frac{1}{n}}(x)} \mid \{x\}) \neq \phi$

نضع $G_n = (\overline{\beta_{\frac{1}{n}}(x)})^c$ $\Leftarrow$ G_n مجموعة مفتوحة في X لكل $n \in Z^+$ $\Leftarrow$ $G = \bigcap_{n \in Z^+} G_n = \{x\}$

$$A \subseteq X \mid \{x\} = X \mid \bigcap_{n \in Z^+} G_n = X \cap (\bigcap_{n \in Z^+} G_n)^c = X \cap (\bigcup_{n \in Z^+} G_n^c) = X \cap (\bigcup_{n \in Z^+} \overline{\beta_{\frac{1}{n}}(x)}) = \bigcup_{n \in Z^+} (X \mid \overline{\beta_{\frac{1}{n}}(x)}) = \bigcup_{n \in Z^+} G_n$$

$\Leftarrow$ $\{G_n : n \in Z^+\}$ غطاء مفتوح إلى A

بما أن المجموعة A مرصوصة $\Leftarrow$ يوجد عدد صحيح k بحيث أن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G_i$

$\Leftarrow$ $A \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_k$ $\Leftarrow$ $A \subseteq G_k$ $\Leftarrow$ $A \cap \beta_{\frac{1}{k}}(x) = \phi$

وهذا تناقض $\Leftarrow$ A مجموعة مغلقة في X.

الآن نبرهن المجموعة A مقيدة.

ليكن $x_0 \in X$ $\Leftarrow$ $\beta_n(x_0)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $n \in Z^+$

ليكن $x_0 \in A$ ، نضع $d(x, x_0) = \varepsilon$

بما أن $x \neq x_0$ $\Leftarrow$ $d(x, x_0) > 0$

باستخدام خاصية ارخميدس يوجد $k \in Z^+$ بحيث $\frac{1}{k} > \varepsilon$ $\Leftarrow$ $d(x, x_0) > \frac{1}{k}$ لكل $x \neq x_0$

$\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{k \in Z^+} \beta_k(x)$

بما أن A مجموعة مرصوصة $\Leftarrow$ يوجد عدد صحيح m بحيث أن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \beta_i(x)$

$\Leftarrow$ $A \subseteq \beta_1(x) \subseteq \beta_2(x) \subseteq \cdots \subseteq \beta_m(x)$ $\Leftarrow$ $A \subseteq \beta_m(x)$

يوجد $m \in Z^+$ بحيث أن تحتوي على x وان $U \cap V = \phi, A \subseteq V$

$\Leftarrow$ A مجموعة مقيدة في X.

ملاحظة

عكس هذه المبرهنة ليس صحيح دائما، بعبارة أخرى، ليس بالضرورة أن تكون كل مجموعة مغلقة ومقيدة في فضاء متري تكون مرصوصة.

خاصية هاين بوريل :

يقال للفضاء المتري بأنه يحقق خاصية هاين بوريل إذا كانت كل مجموعة مقيدة ومغلقة فيه تكون مرصوصة

مبرهنة(18)

الفضاء الاقليدي R^n يحقق خاصية هاين بوريل.

البرهان:

لتكن A مجموعة مغلقة ومقيدة في R^n.

يجب أن نبرهن A مجموعة مرصوصة في R^n **(H.w)**

تعريف (19)

يقال عن عائلة من المجموعات بأنها تحقق خاصية التقاطع المنتهي (**Finite Intersection Properly**) إذا كان تقاطع كل عائلة جزئية منتهية منها مجموعة غير خالية

مبرهنة (20)

الفضاء المتري (X,d) يكون مرصوصاً إذا وفقط إذا كانت كل عائلة من مجموعات مغلقة فيه وتحقق خاصية التقاطع المنتهي فأنها غير خالية التقاطع

البرهان:

نفرض (X,d) فضاء مرصوص

لتكن $F=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ عائلة من المجموعات المغلقة في X وتحقق خاصية التقاطع المنتهي

سنبرهن بطريقة التناقض . نفرض $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\phi \Leftarrow \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\phi^c$

$\Leftarrow X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda{}^c \Leftarrow \{A^c{}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى X

$\Leftarrow$ يوجد $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\Lambda$ بحيث أن $X=\bigcup_{C^-=1}^{n}A_{\lambda_i}^c \Leftarrow \phi=\bigcap_{i^-=1}^{n}A_{\lambda_i}$

$\Leftarrow F$ لا تحقق خاصية التقاطع المنتهي وهذا تناقض $\Leftarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\neq\phi$

الاتجاه الأخر

نفرض كل عائلة من مجموعات مغلقة وتحقق خاصية التقاطع المنتهي فأنها غير خالية التقاطع

ليكن $F=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى X

$\Leftarrow X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda,\ G_\lambda$ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda \Leftarrow \phi=\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda{}^c$

$\Leftarrow \{G_\lambda{}^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ عائلة من مجموعات مغلقة في X بحيث أن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda{}^c=\phi$ وعليه هذه العائلة لا تحقق خاصية التقاطع المنتهي

$\Leftarrow$ يوجد $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in \Lambda$ بحيث أن $\bigcap_{i=1}^{n} G_{\lambda_i}^c = \phi \Leftarrow X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}^{n} G_{\lambda_i}$

وعليه $\Leftarrow$ $\{G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2},\ldots,G_{\lambda_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من F إلى X

$\Leftarrow$ (X,τ) فضاء مرصوص.

تعريف (21)

يقال عن الفضاء المتري (X,d) بأنه مرصوص عدياً (Countable Compact) إذا كان كل غطاء مفتوح وقابل للعد في X يحتوي على غطاء جزئي منتهي

مبرهنة (22)

الفضاء المتري (X,d) يكون مرصوص عدياً إذا وفقط إذا كانت كل عائلة قابلة للعد من مجموعات مغلقة فيه وتحقق خاصية التقاطع المنتهي تكون غير خالية التقاطع

البرهان :

مشابه لبرهان مبرهنة (20)

الاستمرارية والتراص Continuity and Compactness

مبرهنة (22)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءَ متريا, ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة .إذا كانت X فضاء مرصوصا فأن $f(X)$ تكون مجموعة مرصوصة في Y، بعبارة أخرى الصورة المستمرة لفضاء مرصوص تكون مجموعة مرصوصة.

البرهان

لتكن $F=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى $f(X)$ في $Y \Leftarrow f(X)\subseteq \bigcup_{\lambda\cup\Lambda} G_\lambda$ **لكل** $G_\lambda\in\tau_2,$

$\lambda\in\Lambda$

$$X\subseteq f^{-1}(f(X))\subseteq f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(G_\lambda)$$

بما أن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(G_\lambda)\subseteq X \Leftarrow X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(G_\lambda)$

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(G_\lambda)$ مجموعة مفتوحة في X **لكل** $\lambda\in\Lambda$

$\{f^{-1}(G_\lambda)\}$ غطاء مفتوح إلى X.

بما أن X فضاء مرصوص $\Leftarrow$ يوجد $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$ بحيث أن $X=\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\lambda_i})$

$$f(X)=f(f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}))\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i} \Leftarrow X=f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}) \Leftarrow$$

$\Leftarrow$ $f(X)$ مجموعة مرصوصة في Y.

نتيجة (22)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءَ متريا , ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة .إذا كانت A مجموعة مرصوصة في X فأن $f(A)$ تكون مجموعة مرصوصة في Y

ملاحظة

ليس بالضرورة أن تكون الصورة العكسية المستمرة لمجموعة مرصوصة تكون مجموعة مرصوصة. المثال التالي يوضح ذلك

مثال (23)

ليكن (R,d_u) فضاء متريا اعتياديا ولتكن الدالة $f:R\to R$ معرفة بالصيغة $f(x)=2$

لكل $x\in R$.نلاحظ أن الدالة f مستمرة لأنها ثابتة والمجموعة $A=\{1,2,3\}$ مرصوصة في R لأنها منتهية . ولكن $f^{-1}(A)=R$ ليست مرصوصة

مبرهنة (24)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءَ متريا ً بحيث أن $X\cong Y$ ، فان X فضاء مرصوص إذا وفقط إذا كان Y فضاء مرصوص.

البرهان

بما إن $X\cong Y \Leftarrow$ يوجد تشاكل $f:X\to Y$

نفرض X فضاء مرصوص

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow f(X)$ مجموعة مرصوصة في Y

بما أن الدالة f شاملة $\Leftarrow f(X)=Y \Leftarrow Y$ فضاء مرصوص

الاتجاه الآخر

نفرض Y فضاء مرصوص

بما أن الدالة $f^{-1}:Y\to X$ مستمرة $\Leftarrow f^{-1}(Y)=X$ فضاء مرصوص

مبرهنة (25)

ليكن (X,d) فضاءَ مرصوصاً ولتكن $f:X\to R$ دالة مستمرة فأن

(1) الدالة f تكون مقيدة

(2) إذا كانت $\alpha=\inf\{f(x):x\in X\}$ $\beta=\sup\{f(x):x\in X\}$ فأنه يوجد $a,b\in X$ بحيث أن $f(a)=\alpha$ $f(b)=\beta$

البرهان:

بما أن X فضاء مرصوص و الدالة f مستمرة $\Leftarrow f(X)$ مجموعة مرصوصة في R

بما أن كل مجموعة مرصوصة في R تكون مغلقة ومقيدة (مبرهنة هاين – يوريل)

$\Leftarrow f(X)$ تكون مقيدة

بما أن $f(X)$ مقيدة $\Leftarrow$ يوجد $\alpha,\beta\in R$ وكذلك بما أن $f(X)$ مغلقة $\Leftarrow \alpha,\beta\in f(X)$

نختار $b\in f^{-1}(\{\beta\}),\quad a\in f^{-1}(\{\alpha\})\Leftarrow f(b)=\beta,\quad f(a)=\alpha$

مبرهنة (26)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءَ متريا ً ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة. إذا كان X فضاء مرصوص فأن f مستمرة بانتظام .

البرهان :

ليكن $\varepsilon>0$

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ لكل $p\in X$ ، يوجد $\delta_p>0$ بحيث أن لكل $x\in X$

$$d_1(x,p)<\delta_p \quad \text{يؤدي إلى} \quad d_2(f(x),f(p))<\frac{\varepsilon}{2}$$

العائلة $\{\beta_{\frac{1}{2}\delta_p}(p):p\in X\}$ غطاء مفتوح إلى X

بما أن X فضاءَ مرصوصاً $\Leftarrow$ توجد $p_1,p_2,\cdots,p_n\in X$ بحيث أن $X=\bigcup_{i=1}^{n}\beta_{\frac{1}{2}\delta_{p_i}}(p_i)$

نضع $\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta_{p_1},\cdots,\delta_{p_n}\}\Leftarrow \delta>0$

ليكن $x,y\in X$ بحيث أن $d_1(x,y)<\delta \Leftarrow$ يوجد $k\in Z^+$ ، $1\le k\le n$

بحيث أن $x\in\beta_{\frac{1}{2}\delta_{p_k}}(p_k)$ وعليه $d_1(x,p_k)<\frac{1}{2}\delta_{p_k}$ وكذلك

$$d_1(y,p_k)\le d_1(y,x)+d_1(x,p_k)<\delta+\frac{1}{2}\delta_{p_k}\le\frac{1}{2}\delta_{p_k}$$

$$d_2(f(x),f(y))\le d_2(f(x),f(p_k))+d_2(f(p_k),f(y))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

وعليه لكل $\varepsilon>0$ ، يوجد $\delta>0$ بحيث أن لكل $x,y\in X$

$$d_1(x,y)<\delta \quad \text{يؤدي إلى} \quad d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$$

$\Leftarrow f$ مستمرة بانتظام .

نتيجة(27)

ليكن (R,d_u) فضاء متريا اعتياديا. إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to R$ مستمرة فأنها مستمرة بانتظام.

المصادر

[1] عادل غسان نعوم،"**مقدمة في التحليل الرياضي**"، جامعة بغداد – العراق 1986.

[2] Apostol, " Mathematical Analysis"**,2 nd, 1974**

[3] Ash, R. B., " Real Analysis And Probability"**, 1972.**

[4] Billingsley, P., " Probability And Measure " **, 1979.**

[5] Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.," Real Variables" **, 1969.**

[6] Edwin Hewitt Karl Stromberg, " Real And Abstract Analysis" **, 1978**

[7] Folland . G. B.," Real Analysis"**,2 nd, 1999**

[8] Goldberg, R. R.," Methods Of Real Analysis"**,1979.**

[9] Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.," Introductory Real Analysis",**1970.**

[10] Royden, H. L.," Real Analysis",**1988**

[11] Rudin, W., " Principles Of Mathematical Analysis",**1953**

[12] Rudin, W., " Real And Complex Analysis",**19**

[13] Ruel V. Churchill James W. Brown Roger F. Verhey," Complex Variables And Applications",**3 rd, 1974.**

[14] Scott, D. B., And Tims, S. R.," Mathematical Analysis An Introduction",**1966.**

[15] Sharma, J. N And Vasishtha, A. R.," Real Analysis",**5 th, 1977.**

[16] Walter Rudin," Principles Of Mathematical Analysis",**2 nd, 1964.**

[17] Walter Rudin," Real And Complex Analysis",**2 nd, 1974.**

[18] Walter Rudin," Principles Of Mathematical Analysis",**3 rd, 1986.**