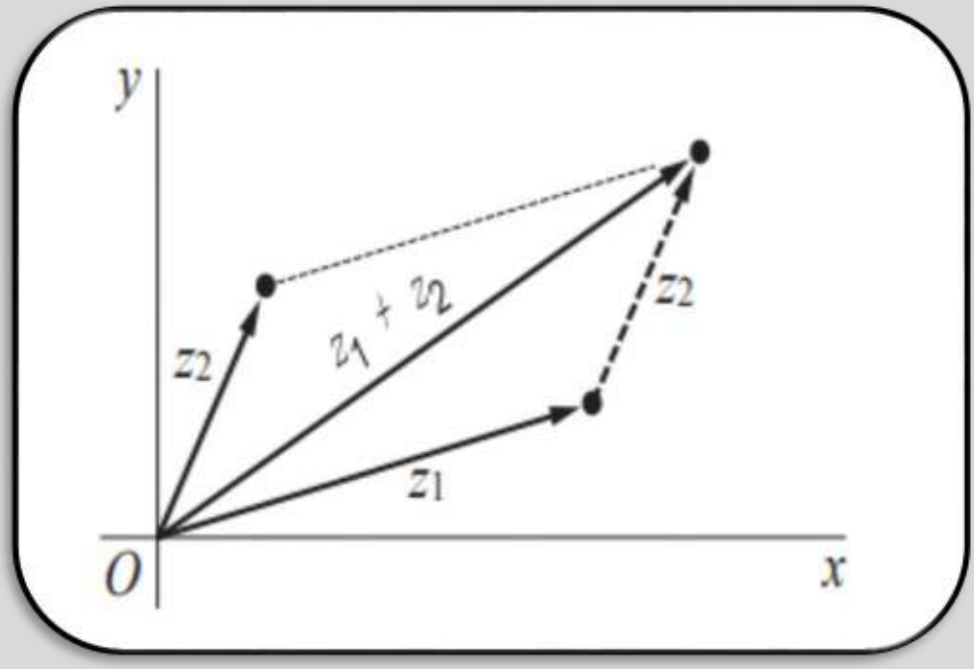
جامعة الموصل
كلية التربية الأساسية
قسم الرياضيات

محاضرات في التحليل العقدي

الصف الرابع



إعداد
د. ربيع دارغوث
2022-2021

مفردات المنهج

الفصل الاول : _الاعداد العقدية..... 1
(1.1) تعريف العدد المعقد 1
(2.1) جمع وطرح الاعداد المعقدة 2
(3.1) ضرب الاعداد المعقدة 2
(4.1) مرافق العدد المعقد 3
(5.1) قسمة الاعداد المعقدة 3
(6.1) خواص المرافق للعدد المعقد 4
(7.1) الاعداد العقدية كحقل 8
(8.1) القيمة المطلقة للعدد المعقد 13
(9.1) خواص القيمة المطلقة 13
(10.1) الاعداد العقدية كفضاء متري 15
(11.1) التمثيل الهندسي للعدد المعقد 18
(12.1) الصيغة القطبية للعدد المعقد 19
(13.1) إيجاد النظير الضربي للعدد المعقد باستخدام الإحداثيات القطبية 21
(14.1) مبرهنة دي موفري 26
(15.1) صيغة اويلر 26
(16.1) القوى للعدد المعقد 27
(17.1) الجذور للعدد المعقد 28

الفصل الثاني : الدوال التحليلية 32
(1.2) المتغير المعقد 32
(2.2) الدوال المعقدة 32
(3.2) دالة وحيدة القيمة 33
(4.2) دالة متعددة القيم 33
(5.2) الدالة المتباينة 33
(6.2) الدالة العكسية 33
(7.2) الدالة المركبة 34
(8.2) الغايات 34

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(9.2) الاستمرارية 39
(10.2) المشتقة 40
(11.2) قواعد الاشتقاق 41
(12.2) علاقة المشتقة بالاستمرارية..... 42
(13.2) معادلة كوشي– ريمان 47
(14.2) الدالة التحليلية 48
(15.2) الدالة الكلية 50
(16.2) النقاط الشاذة 50
(17.2) الدوال التوافقية 53

المصادر :

1. الدوال المعقدة وتطبيقاتها / تأليف د. *سمير بشير حديد* ، *يحيى عبد سعيد*.
2. المتغيرات المعقدة و تطبيقاتها / تأليف ر . شرشل ، جي . براون ، ر. فيرى .

الفصل الاول

الاعداد العقدية

(1.1) تعريف العدد المعقد

يعرف العدد المعقد z بانه زوج مرتب $z=(x,y)$ حيث ان x,y عددان حقيقيان ، يسمى x الجزء الحقيقي للعدد المعقدz ويرمز له $R(z)$ ويسمى y الجزء الخيالي للعدد المعقد z ويرمز له $I(z)$ أي ان:

$$z=(x,y)$$

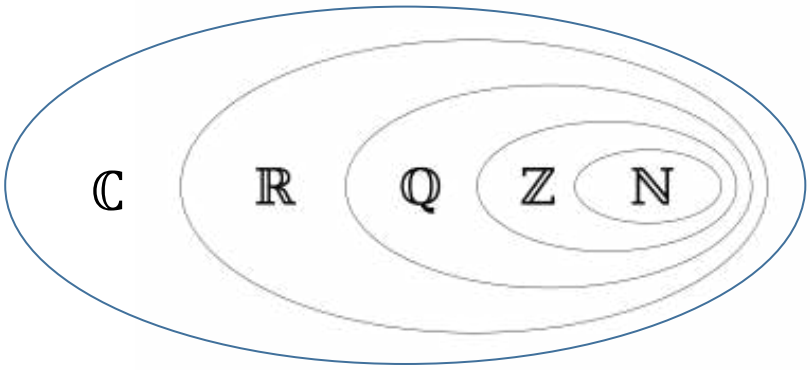
$$x=R(z) \quad y=I(z) \ ,$$

ملاحظة:

مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة جزئية من الاعداد المعقدة $\mathbb{C}$ أي ان $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ حيث ان كل عدد حقيقي هو عدد معقد وذلك عندما يكون الجزء الخيالي منه مساوي للصفر أي ان العدد المعقد $z=(x,0)$ هو عدد معقد وهو أيضا عدد حقيقي لان $I(z)=0$.

الازواج مرتبة $(x,0)$ تسمى بالأعداد الحقيقية وتكتب بالصيغة x والازواج مرتبة $(0,y)$ تسمى بالأعداد الخيالية الصرفة وتكتب بالصيغة اي ان

$$(0,y)=iy \quad (x,0)=x \ ,$$



$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(2.1) جمع وطرح الاعداد المعقدة

اذا كان $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ فأن جمع وطرح الاعداد العقدية على النحو الآتي:

$$z_1 \mp z_2 = (x_1, y_1) \mp (x_2, y_2) = (x_1 \mp x_2 \ , y_1 \mp y_2)$$

(3.1) ضرب الاعداد المعقدة

اذا كان $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ فأن عملية الضرب الاعداديين $z_1.z_2$ على النحو الآتي:

$$z_1.z_2 = (x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2 \ , x_1y_2 + y_1x_2)$$

مثال (1) اذا كان $z_1 = (1,2)$, $z_2 = (-3,4)$ جد $z_1 + z_2$ ، $z_1.z_2$

الحل

$$z_1 + z_2 = (1,2) + (-3,4) = (1 - 3 \ , 2 + 4) = (-2 \ , 6)$$
$$z_1.z_2 = (1,2).(-3,4) = (-3 - \ 8 \ , 4 - 6) = (-11 \ , -2)$$

ملاحظة: يمكن كتابة أي عدد معقد $z = (x, y)$ بالصيغة الاتية

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (0,1)(0, y) \\ &= x + iy \end{aligned}$$

حيث ان x, y عدد حقيقيان و ان $i^2 = -1$

مثال (2) جد i^3, i^4, i^5

الحل

$$i^3 = i^2.i = (-1)i = -i$$
$$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^2.i^3 = (-1)(-i) = i$$
$$i^6 = ?$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

مثال (3) اكتب العد المعقد $z = (2,5)$ بالصيغة $z = x + iy$

الحل

$$z = 2 + 5i$$

(4.1) مرافق العدد المعقد

اذا كان $z = x + iy$ فأن مرافق العدد المعقد z هو $\overline{z}$ ويعرف كالاتي:

$$\overline{z} = x - iy$$

مثال (4) اذا كان $z = -3 + 4i$ جد $\overline{z}$ ، $z.\overline{z}$

الحل

$$\overline{z} = -3 - 4i$$

$$z.\overline{z} = (-3 + 4i)(-3 - 4i) = 9 - 12i + 12i + 16 = 25$$

(5.1) قسمة الاعداد المعقدة

اذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ فأن عملية قسمة الاعداديين z_1/z_2 على النحو الآتي:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\left(\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}\right)$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)i}{x_2x_2 - ix_2y_2 + ix_2y_2 - y_2y_2i^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

مثال (5) اذا كان $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -3 + 4i$ جد $\frac{z_1}{z_2}$

الحل

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{-3 + 4i} = \frac{1 + 2i}{-3 + 4i}\left(\frac{-3 - 4i}{-3 - 4i}\right)$$

$$= \frac{-3 + 8}{(-3)^2 + (4)^2} + i\frac{-6 - 4}{(-3)^2 + (4)^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,i$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات