

(6.1) خواص المرافق للعدد المعقد

- (1) $z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = 0$
- (2) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$
- (3) $z + \bar{z} = 2R(z)$
- (4) $z - \bar{z} = 2iI(z)$
- (5) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- (7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$

Exercises (1)

جد ما يلي:

- (1) $I\left(\frac{1}{1+i}\right)$
- (2) $R((1+i)^2)$
- (3) $R(i^{17})$
- (4) $\frac{2-i}{1+2i}$

اثبت ما يلي:

- (5) $\overline{(i\bar{z})} = -i\bar{z}$
- (6) $\overline{\bar{z} + 2i} = z - 2i$

(7) متى تتحقق المعادلة الآتية $\bar{z} = z$ (8) متى تتحقق المعادلة الآتية $\bar{z} = -z$ (9) جد حل المعادلة الآتية $x^2 + 1 = 0$ (10) جد قيمة x, y الحقيقيتين اللتين تحقق المعادلة الآتية $y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$ (11) ضع العدد i^{99} بصيغة $x + iy$ (12) حل العدد 50 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a + ib$

حل تمارين (1)

$$(1) \quad I\left(\frac{1}{1+i}\right)$$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \left(\frac{1-i}{1-i}\right) = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$I\left(\frac{1}{1+i}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad R((1+i)^2)$$

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$R((1+i)^2) = 0$$

$$(3) \quad R(i^{17})$$

$$i^{17} = (i^4)^4 i = i$$

$$R(i^{17}) = 0$$

$$(4) \quad \frac{2-i}{1+2i}$$

$$\frac{2-i}{1+2i} = \frac{2-i}{1+2i} \left(\frac{1-2i}{1-2i}\right) = \frac{2-4i-i+2i^2}{1+4} = -i$$

اثبت ما يلي:

$$(5) \quad (\overline{iz}) = -i\bar{z}$$

$$L.H.S = (\overline{iz}) = (\overline{i\bar{z}}) = \bar{i}\bar{\bar{z}} = -i\bar{z} = R.H.S$$

طريقة ثانية

$$\begin{aligned} L.H.S &= (\overline{i(x+iy)}) = (\overline{-y+ix}) = -y-ix \\ &= -i(x-iy) = -i\bar{z} = R.H.S \end{aligned}$$

$$(6) \quad \overline{\bar{z} + 2i} = z - 2i$$

$$L.H.S = \overline{\bar{z} + 2i} = \bar{\bar{z}} + \overline{2i} = z - 2i = R.H.S$$

طريقة ثانية

$$L.H.S = \overline{\overline{(x+iy)} + 2i} = \overline{(x-iy+2i)} = \overline{(x-i(y-2))} = x+i(y-2) \\ = x+iy-i2 = z-2i = R.H.S$$

$$(7) \quad \bar{z} = z \text{ متى تتحقق المعادلة الاتية}$$

الحل: عندما يكون الجزء الخيالي من العدد المعقد مساو للصفر أي ان

$$z = x + 0i \Rightarrow \bar{z} = x = z$$

$$(8) \quad \bar{z} = -z \text{ متى تتحقق المعادلة الاتية}$$

الحل: عندما يكون الجزء الحقيقي من العدد المعقد مساو للصفر أي ان

$$z = 0 + iy \Rightarrow \bar{z} = -iy = -z$$

$$(9) \quad \text{جد حل المعادلة الاتية } x^2 + 1 = 0$$

الحل:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - i^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+i)(x-i) = 0 \Rightarrow x = \pm i$$

$$(10) \quad \text{جد قيمة } x, y \text{ الحقيقيتين اللتين تحقق المعادلة الاتية}$$

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

الحل:

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

$$\Rightarrow y + 5i = (2x^2 - 2) + (4ix + ix)$$

$$\Rightarrow y + 5i = (2x^2 - 2) + 5ix$$

$$\Rightarrow y + 5i = (2x^2 - 2) + 5ix$$

ملاحظة: إذا تساوي عددين معقدين فإن الجزء الحقيقي للعدد الأول يساوي الجزء الخيالي للعدد الثاني وكذلك الجزء الخيالي للعدد الأول يساوي الجزء الخيالي للعدد الثاني.

$$y = 2x^2 - 2 \quad \dots \dots (1)$$

$$5x = 5$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \dots \dots (2)$$

$$\Rightarrow y = 2(1)^2 - 2 = 0$$

اذن

$$y = 0, x = 1$$

(11) اثبت ان

$$(1 - i)(1 - i^2)(1 - i^3)(1 + i^4) = 8$$

الحل

$$\begin{aligned} L.H.S &= (1 - i)(1 - i^2)(1 - i^3)(1 + i^4) \\ &= (1 - i)(1 + 1)(1 + i)(1 + 1) \\ &= 4(1 - i)(1 + i) \\ &= 4(1 + 1) \\ &= 8 = R.H.S \end{aligned}$$

(12) ضع العدد i^{99} بصيغة $x + iy$

الحل

$$\begin{aligned} i^{99} &= (i^4)^{24}(i^2)(i) = (1)^{24}(-1)(i) = -i \\ \Rightarrow i^{99} &= 0 - i \end{aligned}$$

(13) حل العدد 50 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a + ib$

الحل

$$50 = 49 + 1 = 49 - i^2 = (7 - i)(7 + i)$$

(7.1) الاعداد العقدية كحقل

ان الاعداد العقدية مع عملية الجمع والضرب $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ تمثل حقلا يسمى حقل الاعداد العقدية ، حيث اذا كان
 $z_3 = x_3 + iy_3, z_2 = x_2 + iy_2, z_1 = x_1 + iy_1, z = x + iy$ اعداد معقدة بحيث ان
 $x_3, y_3, x_2, y_2, x_1, y_1, y, x \in \mathbb{R}$ فان الاعداد العقدية مع عملية الجمع والضرب تحقق الشروط الاتية

(1) الانغلاق

- **الجمع:** حاصل جمع عددين عقديين ينتج عدد عقدي أي ان
 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) \in \mathbb{R}, (y_1 + y_2) \in \mathbb{R} \Rightarrow (z_1 + z_2) \in \mathbb{C}$
- **الضرب:** حاصل ضرب عددين عقديين ينتج عدد عقدي أي ان

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2), \\ (x_1 x_2 - y_1 y_2) &\in \mathbb{R}, (x_2 y_1 + x_1 y_2) \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow (z_1 \cdot z_2) &\in \mathbb{C} \end{aligned}$$

(2) خاصية الابدالية

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 \\ &= (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) = z_2 + z_1 \\ \Rightarrow z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

• **الجمع:**

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2) \\ &= x_2 x_1 - y_2 y_1 + iy_1 x_2 + iy_2 x_1 \\ &= x_2 x_1 + iy_2 x_1 - y_2 y_1 + iy_1 x_2 \\ &= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) \\ &= (x_2 + iy_2)[x_1 + iy_1] = z_2 \cdot z_1 \\ \Rightarrow z_1 \cdot z_2 &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

• **الضرب:**

(3) خاصية التجميعية

$$\begin{aligned} \Rightarrow [z_1 + z_2] + z_3 &= z_1 + [z_2 + z_3] \\ \Rightarrow [z_1 \cdot z_2] \cdot z_3 &= z_1 \cdot [z_2 \cdot z_3] \end{aligned}$$

• **الجمع:**• **الضرب:**

(4) العنصر المحايد

• المحايد الجمعي : $0 = (0 + 0i) \in \mathbb{C}$ بحيث ان $z + 0 = z$

$$z + (0 + i0) = (x + iy) + (0 + 0i) = (x + 0) + (y + 0)i = z$$

$$\Rightarrow z + (0 + i0) = z$$

• المحايد الضربي : $1 = (1 + 0i) \in \mathbb{C}$ بحيث ان $z \cdot 1 = z$

$$z \cdot (1 + 0i) = (x + iy) \cdot (1 + 0i)$$

$$= (x - 0) + i(y + 0) = x + iy = z$$

$$\Rightarrow z \cdot (1 + i0) = z$$

(5) النظير

• النظير الجمعي: لكل عنصر $z = x + iy \in \mathbb{C}$ فإن يوجد $-z = -x - iy \in \mathbb{C}$ بحيث ان $z + (-z) = 0$

$$z + (-z) = (x + iy) + (-x - iy)$$

$$= (x - x) + (y - y)i = 0 + 0i$$

$$\Rightarrow z + (-z) = 0 + 0i$$

• النظير الضربي: لكل عنصر $z \in \mathbb{C}$ فإن يوجد z^{-1} بحيث ان $zz^{-1} = 1$

$$z \cdot \left(\frac{1}{z}\right) = (x + iy) \cdot \frac{1}{x + iy} = \frac{x + iy}{x + iy} \left(\frac{x - iy}{x - iy}\right)$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1 = 1 + 0i$$

$$\Rightarrow z \cdot \left(\frac{1}{z}\right) = 1 + 0i$$

(6) خاصية التوزيع الضرب على الجمع

$$z_1 \cdot [z_3 + z_2] = z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2$$