

Exercises (2)

1. حل المعادلات الآتية

$$(2 - 4i) + z = -5 + i$$

2. جد النظير الضربي للأعداد ثم تحقق من الناتج

$$z_1 = 2 - 2i, \quad z_2 = 3 + i$$

3. ضع كلا مما يأتي بالصورة $a + ib$

$$\frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{2-i}{3+4i}, \quad \sqrt{-100}$$

حل تمارين 2

1. حل المعادلات الآتية

$$(2 - 4i) + z = -5 + i$$

الحل

$$\begin{aligned}(2 - 4i) + z &= -5 + i \\ \Rightarrow (2 - 4i) + z + (-2 - 4i) &= -5 + i + (-2 - 4i) \\ \Rightarrow z &= -7 - 3i\end{aligned}$$

2. جد النظير الضربي للأعداد ثم تحقق من الناتج

$$z = 2 - 2i, \quad \omega = 3 + i$$

الحل

$$\begin{aligned}z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{2 - 2i} \left(\frac{2 + 2i}{2 + 2i} \right) \\ &= \frac{2 + 2i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \\ \Rightarrow z \cdot z^{-1} &= (2 - 2i) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)i = 1 \\ \omega^{-1} &= \frac{1}{\omega} = \frac{1}{3 + i} \left(\frac{3 - i}{3 - i} \right) \\ &= \frac{3 - i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i \\ \Rightarrow \omega \cdot \omega^{-1} &= (3 + i) \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i \right) \\ &= \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10} \right)i \\ &= 1\end{aligned}$$

3. ضع كلا مما يأتي بالصورة $a + ib$

$$\frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{2-i}{3+4i}, \quad \sqrt{-100}$$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i} \left(\frac{1+i}{1+i} \right) \\ &= \frac{1+2i-1}{2} = i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1+i}{1-i} = 0 + i$$

$$\begin{aligned} \frac{2-i}{3+4i} &= \frac{2-i}{3+4i} \left(\frac{3-4i}{3-4i} \right) \\ &= \frac{6-4-3i-8i}{25} = \frac{2-11i}{25} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2-i}{3+4i} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-100} &= \sqrt{(100)(-1)} \\ &= \sqrt{100} \sqrt{-1} = 10i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-100} = 0 + 10i$$

(8.1) القيمة المطلقة للعدد المعقد

القيمة المطلقة للعدد المعقد $z = x + iy$ ويرمز له بالرمز $|z|$ وتعرف بالشكل الآتي

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

حيث ان القيمة للعدد المعقد هو عدد حقيقي غير سالب.

مثال جد القيمة للعدد المعقد $z = 3 + 4i$

الحل:

$$|z| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

(9.1) خواص القيمة المطلقة

$$(1) |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$(2) |z| = |\bar{z}|$$

$$(3) |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

$$(4) \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$(5) \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = y \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$(6) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$(7) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$$

$$(8) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{المتباينة المثلثية}$$

برهان الخاصية (1):

$$L.H.S = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots (1)$$

$$R.H.S = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد ان $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

برهان الخاصية (2):

$$\text{let } z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$L.H.S = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots (1)$$

$$R.H.S = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots (2)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد ان $|z| = |\bar{z}|$.

برهان الخاصية (6):

$$\begin{aligned}
 \text{let } z = x + iy &\Rightarrow \bar{z} = x - iy \\
 L.H.S = |z_1 z_2| &= \sqrt{(z_1 z_2) \cdot \overline{(z_1 z_2)}} \\
 &= \sqrt{(z_1 \bar{z}_1) \cdot (z_2 \bar{z}_2)} \\
 &= \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \cdot \sqrt{z_2 \bar{z}_2} \\
 &= |z_1| \cdot |z_2| = R.H.S
 \end{aligned}$$

برهان الخاصية (8):

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} && (\text{حسب خاصية 1}) \\
 &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)
 \end{aligned}$$

اذن نحصل على

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) + z_2 \bar{z}_2 \quad \dots (1)$$

$$\text{let : } \omega = z_1 \bar{z}_2 \Rightarrow \bar{\omega} = \overline{z_1 \bar{z}_2} = \bar{z}_1 z_2$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 &= \omega + \bar{\omega} \\
 &= 2R(\omega) \leq 2|\omega| \\
 &= 2|z_1||\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|
 \end{aligned}$$

$$z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 \leq 2|z_1||z_2| \quad \dots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
 &= (|z_1| + |z_2|)^2
 \end{aligned}$$

نأخذ جذر الطرفين لنحصل

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(10.1) الأعداد العقدية كفضاء متري

يعرف الفضاء المتري هو زوج مرتب (E, d) حيث E هي مجموعة اعداد والدالة d هي دالة للمسافة، والتي تعرف

$$d: E \rightarrow \mathbb{R}$$

حيث تتحقق الخصائص التالية مجتمعة بالنسبة لأي ثلاثة عناصر $z_1, z_2, z_3 \in E$

- (1) $d(z_1, z_2) \geq 0$ دالة المسافة دالة غير سالبة
- (2) $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
- (3) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
- (4) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ متراجحة المثلثية

مبرهنة : زوج مرتب $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ مجموعة الأعداد المعقدة مع دالة القيمة المطلقة هو فضاء متري

البرهان: كل $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ بحيث ان $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_3 = x_3 + iy_3$ نعرف
الدالة القيمة المطلقة $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1) |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \geq 0$$

اذن $|z_1 - z_2| \geq 0$ وهي دالة غير سالبة

$$(2) |z_1 - z_2| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 - x_1 = 0 \text{ and } y_2 - y_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = x_1 \text{ and } y_2 = y_1$$

$$\Leftrightarrow z_2 = z_1$$

$$(3) |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

(من خواص القيمة المطلقة ، حيث المسافة من z_1 الى z_2 هي نفس المسافة من z_2 الى z_1)

$$(4) |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2 + z_2 - z_1| \quad (\text{نضيف ونطرح } z_2)$$

$$= |(z_3 - z_2) + (z_2 - z_1)|$$

$$\leq |z_3 - z_2| + |z_2 - z_1|$$

$$|z_3 - z_1| \leq |z_3 - z_2| + |z_2 - z_1| \quad \text{اذن}$$

اذن مجموعة الأعداد المعقدة $\mathbb{C}$ مع دالة القيمة المطلقة $|\cdot|$ هي فضاء متري.