Exercises (3)

(1) جد القيمة المطلقة للاعداد الاتية

$$1-2i\,,i\ \ ,-3+i,$$

(2) احسب

$$\left|\frac{2-3i}{3-2i}\right| \quad , \quad |(1-i)^2|$$

(3) اثبت ان

$$\left|(2\bar{z}+5)\left(\sqrt{2}-i\right)\right| = \sqrt{3}|2z+5|$$

(4) اثبت ان:

$$\left(\sqrt{2}\,|z|\right)^2 = [R(z)+I(z)]^2 + [R(z)-I(z)]^2$$

(5) اثبت ان الزوج المرتب $(\mathbb{C}\,;|.|)$ فضاء متري

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

حل تمارين 3

(1) جد القيمة المطلقة للاعداد الاتية $1-2i\,,i\ \ ,-3+i$

$$|1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\,i| \ = \sqrt{0^2+(1)^2} = \ 1$$

$$|-3+i| = \sqrt{(-3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$$

(2) احسب

$$\left|\frac{2-3i}{3-2i}\right| = \left|\frac{2-3i}{3-2i}\left(\frac{3+2i}{3+2i}\right)\right| = \left|\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i\right| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = 1$$

$$|(1-i)^2| = |-2i| \ = \sqrt{(0)^2+(-2)^2} = 2$$

(3) اثبت ان $\left|(2\overline{z}+5)\left(\sqrt{2}-i\right)\right| = \sqrt{3}|2z+5|$

$$\begin{aligned} L.H.S = \left|(2\overline{z}+5)\left(\sqrt{2}-i\right)\right| &= |2\overline{z}+5\,|\left|\sqrt{2}-i\,\right| \\ &= \sqrt{2+1}|2(x-iy)+5\,| \\ &= \sqrt{3}|2x+5-2iy\,| \\ &= \sqrt{3}|2x+5+2iy\,| = \sqrt{3}|2z+5\,| = R.H.S \end{aligned}$$

(4) اثبت ان: $\left(\sqrt{2}\,|z\,|\right)^2 = [R(z)+I(z)]^2+[R(z)-I(z)]^2$

$$L.H.S = \left(\sqrt{2}\,|z\,|\right)^2 = 2|x+iy|^2 = 2x^2+2y^2$$

نطرح من الطرفين $(|x|+|y|)^2$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{2}\,|z|\right)^2-(|x|+|y|)^2 = 2x^2+2y^2-(|x|+|y|)^2$$

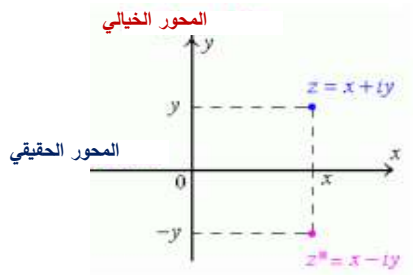
$$\Longrightarrow \left(\sqrt{2}\,|z|\right)^2-(|x|+|y|)^2 = x^2-2xy+y^2 = (|x|-|y\,|)^2$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{2}\,|z|\right)^2 = (|x|+|y|)^2+(|x|-|y\,|)^2 = R.H.S$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(11.1)التمثيل الهندسي للعدد المعقد

ان كل عدد معقد $z = x + iy$ يقابل نقطة احداثياتها (x, y) من المستوي xy وبالعكس (أي أن كل نقطة في المستوي xy تقابل عدداً معقداً)

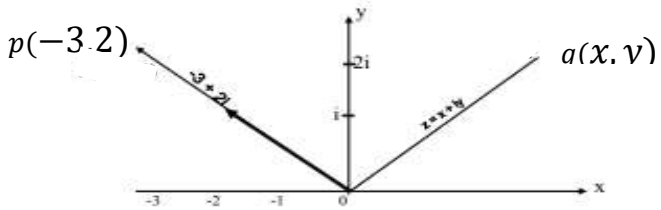


وكل عدد معقد z يمكن تمثيله بمتجه بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطة التي تقابل ذلك العدد وان طول هذا المتجهة هو القيمة المطلقة لذلك العدد (أي ان المسافة بين $(0،0)$ و $(x،y)$) كما يلي

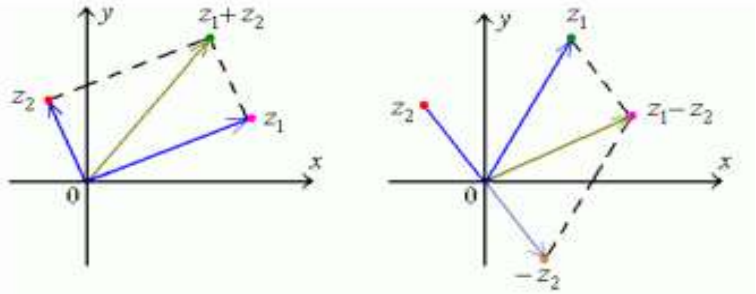
$$\sqrt{(0-x)^2+(0-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

مثال ارسم العدد المعقد $z = -3 + 2i$

الحل: العدد $z = -3 + 2i$ يقابل النقطة $p(-3,2)$



اذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ فأن النقطة التي تقابل $z_1 + z_2$ هي النقطة التي احداثياتها $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ أن المسافة بين نقطتين ممثلتين بالعددين المعقدين z_1 , z_2 هي



$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

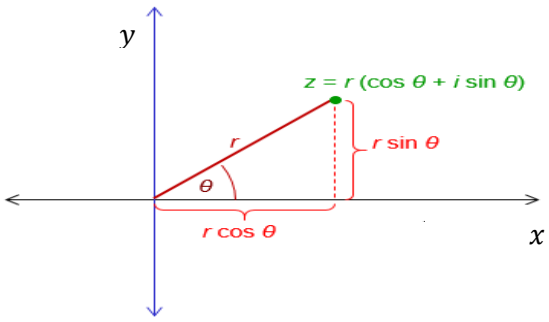
أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(12.1) الصيغة القطبية للعدد المعقد

لتكن (r,θ) تمثل الاحداثيات القطبية للنقطة p التي تقابل العدد المعقد $z = x + iy$ حيث

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) , \quad r^2 = x^2 + y^2$$

ان العدد المعقد $z = x + iy$ يمكن كتابته بالصيغة القطبية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



العدد الحقيقي r هو طول المتجهة الذي يمثل z أي $|z| = r$ وان العدد الحقيقي θ يسمى زاوية الاعتيادية العدد المعقد z ويرمز له $\theta = rag(z)$ ولكل θ عدد غير منتهي من القيم الحقيقية تختلف عن بعضها بالمضاعفات 2π. واذا كانت الزاوية θ ضمن الفترة $(-\pi,\pi)$ تسمى الزاوية الأساسية له وتكتب $\theta = Aag(z)$ اين ان $\pi \leq Aag(z) \leq -\pi$ وبهذا يكون

$$arg(z) = Aag(z) + 2k\pi, \qquad k = 0 \pm 1, \pm, \ldots$$

ملاحظة: لايجاد قيمة زاوية العدد المعقد $arg(z)$ يجب معرفة الربع الذي تقع فيه.

1. اذا كانت في الربع الأول تبقى كما هي.

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \text{موجب} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \text{موجب}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الاول}$$

2. اذا كانت في الربع الثاني تكون الوزاوية $\pi - \theta$.

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \text{سالب} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \text{موجب}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الثاني}$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

3. اذا كانت في الربع الثالث تكون الوزاوية $\pi + \theta$.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \text{سالب} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \text{سالب}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الثالث}$$

4. اذا كانت في الربع الثالث تكون الوزاوية $2\pi - \theta$.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \text{موجب} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \text{سالب}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الرابع}$$

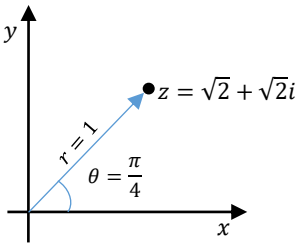
مثال اكتب العدد المعقد $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ بصيغة القطبية مع الرسم

الحل:

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2 + 2 = 4 \Longrightarrow r = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(1) \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$



ملاحظة : من المتطابقات المهمه لزاوية الاعتيادية للعدد المعقد هي

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$$

ملاحظة: إذا ضرب العدد المعقد z بالعدد i فأن المتجهة العدد z يدور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ عكس عقارب الساعة لينطبق على المتجهة iz

البرهان

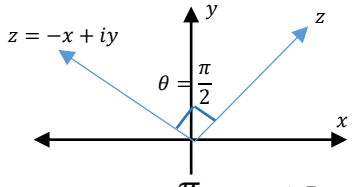
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$iz = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r\left[\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}\right) + i\left(\cos\frac{\pi}{2}\sin\theta + \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]$$

$$= r\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$



أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(13.1) إيجاد النظير الضربي للعدد المعقد باستخدام الإحداثيات القطبية

لإيجاد النظير الضربي بالإحداثيات القطبية نستخدم العلاقة الاتية $z^{-1}=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$

البرهان:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{(\cos\theta-i\sin\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{r(\cos^2\theta+i\sin^2\theta)}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$$

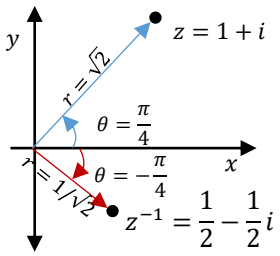
مثال جد النظير الضربي للعدد $z=1+i$ باستخدام الاحداثيات القطبية

الحل:

$$r=\sqrt{2}\,,\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}(1)\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z^{-1}=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$



Exercises (4)

(1) اذا كان $z=2+2i$ ارسم الاعداد المعقدة الاتية $z,\ -z\ ,\ \bar{z},\ |z|$

(2) اذا كان اذا كان $z_1=1+2i$ ، $z_2=-3+4i$ فجد: أرسم كلا من z_1+z_2 ، z_1-z_2 ثم احسب طول المتجهين.

(3) اكتب الاعداد المعقدة الاتية بصيغة القطبية مع الرسم

$z=1+\sqrt{3}i\ ,z=-1+i\ ,z=-1-i\ ,z=\ 2\sqrt{3}-2i$

(4) جد النظير الضربي للعدد $z=-1-i$ باستخدام الاحداثيات القطبية

(5) اثبت ان : $arg(z_1z_2)=arg(z_1)+arg(z_2)$

(6) اثبت ان : $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=arg(z_1)-arg(z_2)$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات