حل تمارين 4

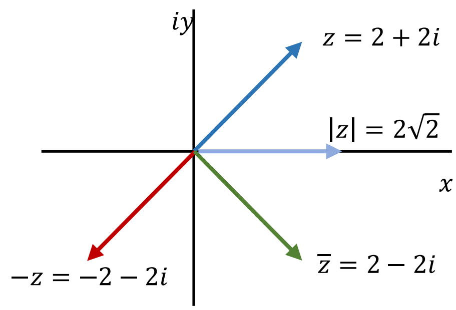
(1) اذا كان $z = 2 + 2i$ ارسم الاعداد المعقدة الاتية $z, \ -z \ , \ \bar{z}, \ |z|$

$z = 2 + 2i$

$-z = -2 - 2i$

$\bar{z} = 2 - 2i$

$|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$



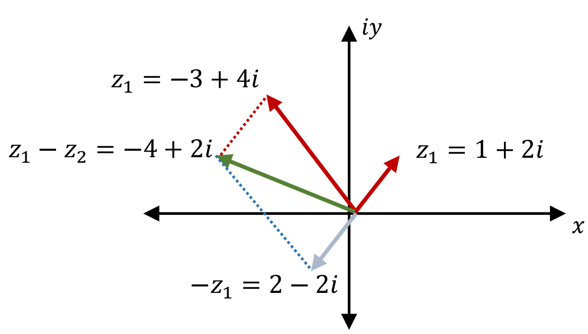
(2) اذا كان اذا كان $z_1 = 1 + 2i \ , z_2 = -3 + 4i$ فجد: أرسم المتجهين $z_1 + z_2$ ، $z_1 - z_2$ ثم احسب اطوالهم.

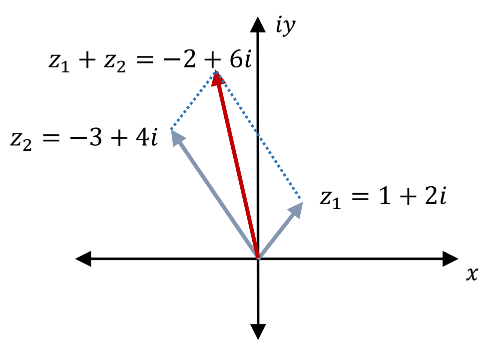
$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (-3 + 4i) = -2 + 6i$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \approx 6.3$

$z_1 - z_2 = (-3 + 4i) - (1 + 2i) = -4 + 2i$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \approx 4.7$





(3) اكتب الاعداد المعقدة الاتية بصيغة القطبية مع الرسم

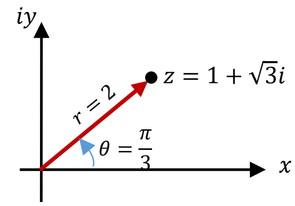
- $\boldsymbol{z = 1 + \sqrt{3}i}$

$$r = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2 \, , \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الاول}$$

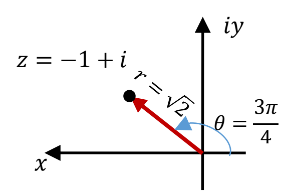
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



- $\boldsymbol{z = -1 + i}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = \tan^{-1}(-1)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الثاني} \Longrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

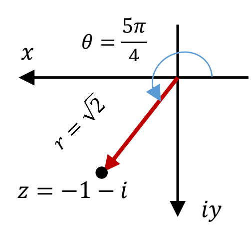


$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

- $\boldsymbol{z = -1 - i}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \qquad \theta = \tan^{-1}(1)$$

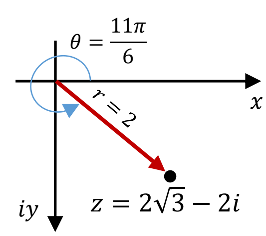
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الثالث} \Longrightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$



$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

- $\boldsymbol{z = 2\sqrt{3} - 2i}$

$$r = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = 4, \ \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$



$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{الربع الرابع} \Longrightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

أعداد: د. ربيع دارغوث/جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(4) جد النظير الضربي للعدد $z = -1 - i$ باستخدام الاحداثيات القطبية

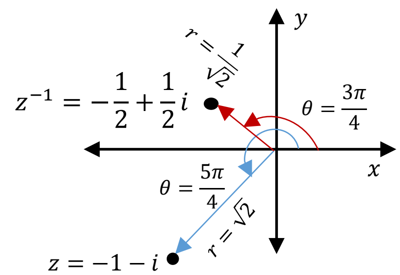
$$r = \sqrt{2}\,,\ \theta = \frac{5\pi}{4} \quad , z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$



(5) اثبت ان: $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

البرهان

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad arg(z_1) = \theta_1$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2), \quad arg(z_2) = \theta_2$$

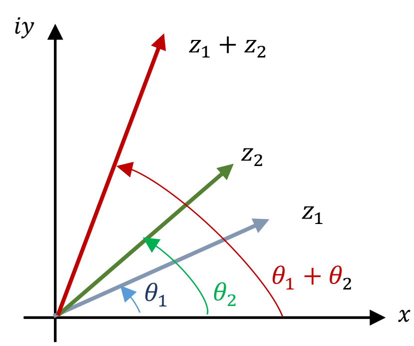
$$\Rightarrow z_1 z_2 = [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)].[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = arg(z_1) + arg(z_2)$$



أعداد: د. ربيع دارغوث/ جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(6) اثبت ان

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$$

البرهان

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad arg(z_1) = \theta_1$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2), \quad arg(z_2) = \theta_2$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} . \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(-\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$$

$$= arg(z_1) - arg(z_2)$$

(14.1) مبرهنة دي موفري

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

حيث n عدد صحيح موجب

مثال بواسطة مبرهنة دي موفري جد $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدلالة من $\sin\theta$ و $\cos\theta$

الحل:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\ \cos\theta\sin\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$\Longrightarrow \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\Longrightarrow \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

(15.1) صيغة اويلر

يعبر عن صيغة اويلر بالمتطابقة الاتية

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

ويمكن كتابة العدد المعقد z بالصيغة الاتية

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}}$$

ومنها يمكن ان نعبر عن النظير الضربي كما يلي

$$\boldsymbol{z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}}$$

ونعبر عن حاصل ضرب عددين معقدين كما يلي

$$\boldsymbol{z_1 . z_2 = \left(r_1e^{i\theta_1}\right).\left(r_2e^{i\theta_2}\right) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$

وكذلك عملية القسمة

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}}$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

مثال اثبت ان $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

الحل:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \Rightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

(16.1) القوى للعدد المعقد

اذا كان $z = re^{i\theta}$ لا يساوي صفر فان القوى الصحيحة للعدد z تعطى بصيغة الاتية

$$\boldsymbol{z^n = r^n e^{in\theta}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

مثال اذا كان $z = re^{i\theta}$ عدد معقد وكان $r = 1$ اثبت ان

$$z^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

الحل:

$$z^3 = e^{3i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$ (صيغة دي موفري)

مثال احسب $(1+i)^8$

الحل:

$$r = \sqrt{2}, \qquad \theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}i\right)}$$

$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^8 = 2^4 e^{2\pi i} = 16(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1+0) = 16$$