

(17.1) الجذور للعدد المعقد

الجذر النوني لأي عدد معقد $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ غير صفري هو العدد المعقد ω^n الذي يحقق المعادلة
الآتية:

$$\omega^k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

حيث $\sqrt[n]{r}$ يمثل الجذر النوني للعدد الحقيقي r الذي يمثل طول العدد المعقد z ، وان $k = 0, 1, \dots, n-1$ والزاوية θ هي زاوية العدد المعقد. وان مجموعة كل الجذور النونية للعدد المعقد ω^n هي: $\{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$

مثال جد جذور $z^4 = 1$

$$(re^{i\theta})^4 = 1 \cdot e^{0i} \Rightarrow r^4 e^{4i\theta} = 1 \cdot e^{0i}, r^4 = 1 \Rightarrow r = 1, \theta = 0,$$

الحل:

$$\text{Or } z = 1 \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \theta = \tan^{-1} \left(\frac{0}{1} \right) = 0$$

$$r = 1, \quad \theta = 0, \quad n = 4, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{اذن}$$

$$\omega^0 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{0 + 2(0)\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2(0)\pi}{4} \right) = (\cos 0 + i \sin 0) = 1.$$

$$\omega^1 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{0 + 2(1)\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2(1)\pi}{4} \right) = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i$$

$$\omega^2 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{0 + 2(2)\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2(2)\pi}{4} \right) = (\cos \pi + i \sin \pi) = -1$$

$$\omega^3 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{0 + 2(3)\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2(3)\pi}{4} \right) = \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i$$

اذن جذور $z^4 = 1$ هي المجموعة $\{1, i, -1, -i\}$

Exercises (5)

$$(1) \text{ اثبت ان } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(2) \text{ اذا كان } z = re^{i\theta} \text{ عدد معقد وكان } r = 1 \text{ اثبت ان } z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(3) \text{ احسب } (-1 + i)^6, (1 + i)^{-8}$$

$$(4) \text{ جد جذور } z^4 = 2 \text{ او احسب } (2)^{\frac{1}{4}}$$

$$(5) \text{ احسب } (-1)^{\frac{1}{3}}, (-i)^{\frac{1}{3}} \text{ مع الرسم}$$

حل تمارين 5

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (1) \text{ اثبت ان}$$

الحل:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \Rightarrow e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta = 2i \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$(2) \text{ اذا كان } z = re^{i\theta} \text{ عدد معقد وكان } r = 1 \text{ اثبت ان } z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

الحل:

$$L.H.S.: z^n = r^n e^{ni\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \left(\text{صيغة دي مويفري} \right) \\ = R.H.S.$$

$$(3) \text{ احسب } (-1 + i)^6, (1 + i)^{-8}$$

الحل:

$$(1 + i)^{-8}$$

$$z = 1 + i, \quad r = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}, \quad 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ (1 + i)^{-8} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{-8} = 2^{-4}e^{-2\pi i} = \frac{1}{16}(\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi)) \\ = \frac{1}{16}(\cos 2\pi - i \sin 2\pi) = \frac{1}{16}(1 - 0) = \frac{1}{16}$$

$$(-1 + i)^6$$

$$z = -1 + i, \quad r = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad -1 + i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} \\ (-1 + i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = 2^3e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 8\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 8(0 - i(-1)) = 8i$$

(4) جد الجذور لـ $z^4 = 2$ أو احسب $(2)^{\frac{1}{4}}$

الحل:

$$Z = 2 \Rightarrow z = 2 + 0i, r = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right), \Rightarrow \theta = 0$$

or: $z = re^{i\theta} = 2 \cdot e^{0i} \Rightarrow r = 2, \quad \theta = 0$

$$r = 2, \quad \theta = 0, \quad n = 4, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\omega^n = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$\omega^0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{0 + 2(0)\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2(0)\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2}(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt[4]{2}(1 + 0) = \sqrt[4]{2}$$

$$\omega^1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{0 + 2(1)\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2(1)\pi}{4} \right) = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt[4]{2}(0 + i) = \sqrt[4]{2}i$$

$$\omega^2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{0 + 2(2)\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2(2)\pi}{4} \right) = (\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt[4]{2}(-1 + 0) = -\sqrt[4]{2}$$

$$\omega^3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{0 + 2(3)\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2(3)\pi}{4} \right) = \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \sqrt[4]{2}(0 - i) = -\sqrt[4]{2}i$$

اذن جذور $z^4 = 2$ هي المجموعة $\{ \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}i, -\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}i \}$

(5) احسب $(-1)^{\frac{1}{3}}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ مع الرسم

الحل:

$$(-1)^{\frac{1}{3}} =$$

$$z = re^{i\theta}, \quad r = \sqrt{-1^2 + 0} = 1, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(0), \theta = \pi \quad (\text{لماذا ؟})$$

$$(\text{موجب } \sin \theta = \frac{y}{r} = 0, \text{ سالب } \cos \theta = \frac{x}{r} = -1) \Leftarrow \text{الربع الثاني أو من الرسم } (-1) \text{ ممكن نحدد موقع العدد}$$

$$r = 1, \quad \theta = \pi, \quad n = 3, \quad k = 0, 1, 2$$

$$\omega^0 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2(0)\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2(0)\pi}{3} \right) = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^1 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2(1)\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2(1)\pi}{3} \right) = (\cos \pi + i \sin \pi) = -1 + 0i = -1$$

$$\omega^2 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2(2)\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2(2)\pi}{3} \right) = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

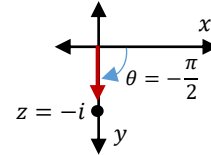
اذن جذور $z^3 = -1$ هي المجموعة $\{ \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \}$

$$(-i)^{\frac{1}{3}} =$$

$$z = re^{i\theta}, \quad r = \sqrt{0 + (-1)^2} = 1, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{0}\right) = \text{كمية معرفة (لماذا؟)}$$

$\Leftrightarrow$ الربع الثالث من الرسم أو $(-i)$ ممكن نحدد موقع العدد

$$r = 1, \quad \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad n = 3, \quad k = 0, 1, 2$$



$$\omega^0 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{-\pi/2 + 2(0)\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi/2 + 2(0)\pi}{3} \right) = \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\omega^1 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{-\pi/2 + 2(1)\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi/2 + 2(1)\pi}{3} \right) = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 0 + i$$

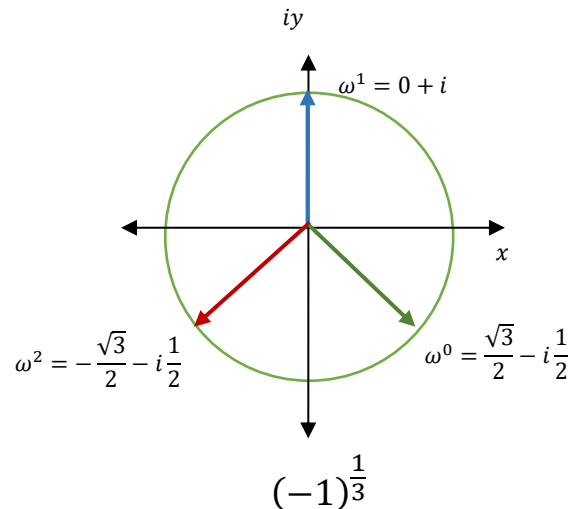
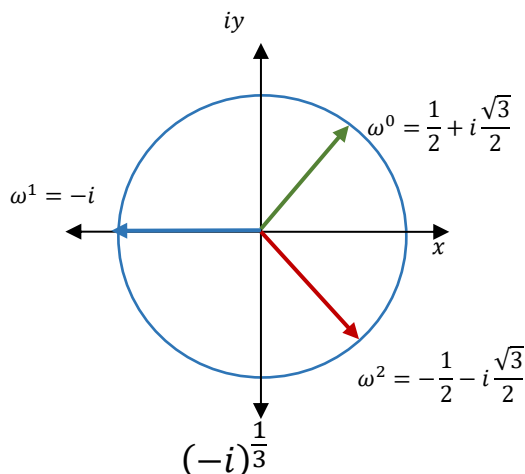
$$\omega^2 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{-\pi/2 + 2(2)\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi/2 + 2(2)\pi}{3} \right) = \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

اذن جذور $z^3 = -i$ هي المجموعة $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$

ملاحظة

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \pi \cos \frac{\pi}{6} - \sin \pi \sin \frac{\pi}{6} = (-1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0) \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \pi \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos \pi = (0) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) (-1) = -\frac{1}{2}$$



الفصل الثاني

الدوال التحليلية

(1.2) المتغير المعقد

إذا كانت D مجموعة من النقاط غير خالية، وكان z يرمز لأي عدد من المجموعة الأعداد المعقدة المقابلة للمجموعة D ، فإن z يسمى متغير معقدًا وتسمى D منطقة تغييره.

(2.2) الدوال المعقدة

لتكن D و R مجموعتان غير خاليتان من النقاط في المستوى المعقد، يقال f الدالة معرفة من D إلى R إذا كانت لكل z في D عددًا w في R بحيث $f(z) = w$ ، تسمى المجموعة D المجال (المنطق) للدالة و المجموعة R المستقر (المدى) للدالة.

مثال جد المجال (المنطق) للدالة الآتية $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$

الحل: $D_f = \{z: z \in \mathbb{C}, z \neq 2i\}$

ملاحظة: يمكن كتابة الدالة $f(z) = w$ بشكل الآتي

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

حيث $u(x, y)$ يمثل الجزء الحقيقي للدالة f و حيث $v(x, y)$ يمثل الجزء الخيالي للدالة f أي أن

$$R(w) = u(x, y), \quad I(w) = v(x, y)$$

مثال اكتب الدالة الآتية $w = z^2$ بصيغة $w = u + iv$ ثم حدد الجزء الحقيقي والخيالي للدالة

الحل:

$$\text{let } z = x + iy$$

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

$$R(w) = u(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$I(w) = v(x, y) = 2ixy$$

(3.2) دالة وحيدة القيمة

$f(z) = w$ بحيث ان R في w تقابله قيمة واحدة فقط $z \in D$ تكون الدالة وحيد القيمة اذا كان لكل

مثال $w = z^2 + z + 1$ على دالة وحيد القيمة

(4.2) دالة متعددة القيم

تسمى الدالة $f(z) = w$ متعدد القيم اذا كان لكل $z \in D$ تقابله اكثر من قيمة واحدة في R من الدالة $f(z)$

مثال هل ان الدالة الاتية متعددة القيم $w = z^{\frac{1}{3}}$

الحل: دالة $w = z^{\frac{1}{3}}$ متعدد القيم حيث لكل z تقابله ثلاث قيم من قيم الدالة w لان

$$w = z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2$$

(5.2) الدالة المتباينة

لتكن $w = f(z)$ دالة منطلقها D يقال ان الدالة متباينة اذا وفقط اذا كان لكل $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ فان

$$f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2$$

(6.2) الدالة العكسية

لتكن f دالة منطلقها D ومداها R فان الدالة العكسية للدالة f (ويرمز لها f^{-1}) هي دالة منطلقها R ومداها

D لكل $w \in R$ فان يوجد $z \in D$ بحيث $w = f(z)$

ولحساب الدالة العكسية للدالة f نجد z بدلالة w أي ان $z = f^{-1}(w)$ ثم نعيد كتابتها بالصيغة الاتية $w = f^{-1}(z)$

مثال جد معكوس الدالة $f(z) = \frac{2}{z+1}$ حيث ان $z \neq -1$

الحل:

$$w = \frac{2}{z+1} \Rightarrow w(1+z) = 2 \Rightarrow w + wz = \frac{2-w}{w} \Rightarrow z = \frac{2-w}{w} - 1$$

ويمكن كتابتها بالصيغة $w = f^{-1}(z) = \frac{2}{z} - 1$