

(7.2) الدالة المركبة

لتكن الدالة $f: B \rightarrow C$ و $g: A \rightarrow B$ دوال فان f تركيب g ويرمز له $f \circ g$ تعرف على انها دالة $f \circ g: A \rightarrow c$ وتعرف كالتالي

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)), \quad \forall z \in A$$

ملاحظة: $f \circ g \neq g \circ f$

مثال اذا كان $f(z) = z^2$ حيث ان $g(z) = z + 1$ جد: $f \circ g, g \circ f$

الحل:

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = (z + 1)^2$$

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = z^2 + 1$$

(8.2) الغايات

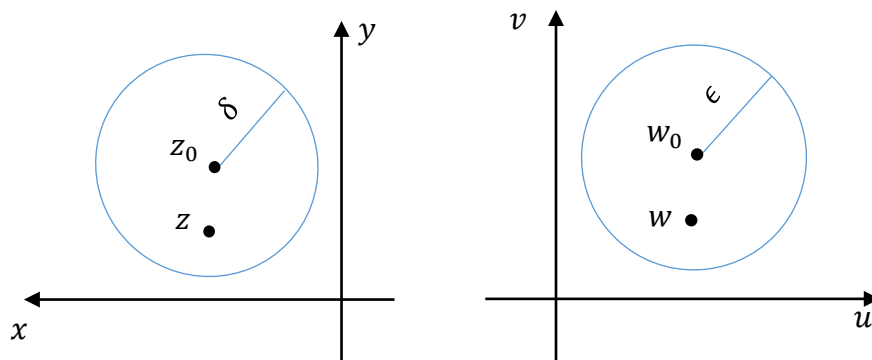
يقال للدالة $f(z) = w$ المعرفة بجوار النقطة z_0 لها غاية مثل w_0 عندما تقترب z من z_0 وتكتب

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

إذا وفقط إذا

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |w - w_0| < \epsilon$$

وهذا يعني انه ان قيمة الدالة $f(z) = w$ تصبح قريبة من w_0 عندما z قريبه جدا من z_0 .



الشكل يوضح مفهوم الاقتراب أي ان العناصر التي تقع في دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها δ في المستوى xy فانه جميع الصور لهذه العناصر تقع في دائرة أخرى مركزها w_0 ونصف قطرها ϵ في المستوى uv .

ملاحظات

- من تعريف الغاية يجب ان تكون الدلة معرفة علة جميع النقاط جوار النقطة z_0
- لم يشترط الاتجاه التي تقترب به z_0 من z .
- يمكن توسيع التعريف الغاية ليشمل الحالة التي يكون فيها z_0 نقطة محيطية لمنطلق الدالة وذلك بأن تحقق المتباينة الاولى من التعريف التي تقع في منطلق الدالة وتحقق المتباينة $|z - z_0| \leq \delta$.

مثال اثبت ان $\lim_{z \rightarrow 2i-1} (2z + 3) = 4i + 1$

الحل: نفرض ان $\epsilon > 0$ بحيث ان $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

اذن يجب ان نبرهن انه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $|z - (2i - 1)| < \delta$

$$\begin{aligned} & |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \\ \Rightarrow & |(2z + 3) - (4i - 1)| < \epsilon \\ \Rightarrow & |2z - 4i + 2| < \epsilon, \\ \Rightarrow & |2||z - (2i - 1)| < \epsilon, \quad (|2| = 2) \\ \Rightarrow & |z - (2i - 1)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\text{نقسم على } 2) \\ \text{Let } \delta = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow & |z - (2i - 1)| < \delta \end{aligned}$$

اذن $\lim_{z \rightarrow 2i-1} (2z + 3) = 4i + 1$

مبرهنة : ليكن $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ و $w_0 = u_0 + iv_0$ فإن

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad \text{اذا فقط اذا كان:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} v(x, y) = v_0$$

مبرهنة : ليكن $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ و $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ فإن

- $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \mp g(z)] = A \mp B$
- $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B$
- $\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{A}{B}, B \neq 0$
- $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |A|$

مثال: اثبت ان الغاية الاتية $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ غير موجودة

الحل: نفرض ان $z = x + iy$ فان $\bar{z} = x - iy$

الان عندما يقترب z من 0 من الحور الحقيقي فان $y = 0$ فان

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 = L_1$$

وعندما يقترب z من 0 من الحور الخيالي فان $x = 0$ فان

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1 = L_2$$

$$\Rightarrow L_1 \neq L_2$$

اذن الغاية غير موجودة

Exercises (6)

1. اذا كان $w = f(z) = z^2 + 1$ فجد كلا من يأتي

$$f(-2 + i), \quad f(1 - 3i), \quad f(i)$$

2. جد المجال (المنطلق) للدوال الاتية

a. $w = \frac{1}{z}$

b. $w = \frac{z-1}{z+1}$

c. $w = \frac{1}{z^2 + 1}$

d. $w = \frac{z}{z + \bar{z}}$

e. $w = \frac{z}{z - \bar{z}}$

f. $w = \frac{1}{1 - |z|}$

3. اكتب الدوال الاتية بصيغة $w = u(x, y) + iv(x, y)$

a. $w = z^3$

b. $w = \frac{1}{z^2}$

c. $w = 2(e^{i\theta})^{10}$

4. اثبت ان $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$

5. اثبت ان $\lim_{z \rightarrow 1} 2iz = 2i$

6. اثبت ان الغاية الاتية $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{|z|}$ غير موجودة

حل تمارين 6

1. اذا كان $w = f(z) = z^2 + 1$ فجد كلا من يأتي

$$f(-2 + i), \quad f(1 - 3i), \quad f(i)$$

$$f(-2 + i) = (-2 + i)^2 + 1 = 4 - 4i - 1 + 1 = 4 - 4i$$

$$f(1 - 3i) = (1 - 3i)^2 + 1 = 1 - 6i - 9 + 1 = -7 - 9i$$

$$f(i) = i^2 + 1 = 0$$

2. جد المجال (المنطلق) للدوال الآتية

a. $w = \frac{1}{z}$, $D_w = \mathbb{C}/\{0\}$

b. $w = \frac{z-1}{z+1}$, $D_w = \{z \in \mathbb{C}, z \neq -i^{4n}, n = 1, 2, 3, \dots\}$

c. $w = \frac{1}{z^2+1}$, $D_w = \{z \in \mathbb{C}, z \neq i^{2(1+2n)}, n = 0, 1, 2, \dots\}$

d. $w = \frac{z}{z+\bar{z}}$, $D_w = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \text{ \& } R(z) \neq 0\}$

e. $w = \frac{z}{z-\bar{z}}$, $D_w = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \text{ \& } I(z) \neq 0\}$

f. $w = \frac{1}{1-|z|}$, $D_w = \mathbb{C}/\{-1, 1, -i, i\}$

3. اكتب الدوال الآتية بصيغة $w = u(x, y) + iv(x, y)$

a. $w = z^3$

$$\begin{aligned} w = z^3 &= (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 \\ &= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \end{aligned}$$

b. $w = \frac{1}{z^2}$

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(x + iy)^2} = \frac{1}{x^2 - y^2 + 2ixy} \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 - y^2 - 2ixy} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} - i \frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} \end{aligned}$$

c. $w = 2(e^{i\theta})^{10}$

$$w = 2e^{10i\theta} = 2\cos(10\theta) + 2i\sin(10\theta)$$

4. اثبت ان $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$

الحل: نفرض ان $\epsilon > 0$ بحيث ان $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$

اذن يجب ان نبرهن انه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $|z - 1| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| < \epsilon &\Rightarrow \left| \frac{iz}{2} - \frac{i}{2} \right| < \epsilon \\ &\Rightarrow \left| \frac{i(z-1)}{2} \right| < \epsilon, \\ &\Rightarrow \frac{|i||z-1|}{|2|} < \epsilon, \quad (\text{السبب } (|2| = 2)|i| = 1) \\ &\Rightarrow |z-1| < 2\epsilon, \quad (\text{نضرب في 2}) \end{aligned}$$

$$\text{Let } \delta = 2\epsilon \Rightarrow |z-1| < \delta \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$$

5. اثبت ان $\lim_{z \rightarrow 1} 2iz = 2i$

الحل: نفرض ان $\epsilon > 0$ بحيث ان $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ اذن يجب ان نبرهن انه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $|z - 1| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| < \epsilon &\Rightarrow |2iz - (2i)| < \epsilon \\ &\Rightarrow |2i||z-1| < \epsilon \\ &\Rightarrow 2|z-1| < \epsilon, \quad (\text{السبب } |2i| = 2) \\ &\Rightarrow |z-1| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (\text{نقسم على 2}) \end{aligned}$$

$$\text{Let } \delta = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |z-1| < \delta \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} 2iz = 2i$$

6. اثبت ان الغاية الاتية $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{|z|}$ غير موجودة

الحل: نفرض ان $z = x + iy$ فأن $\bar{z} = x - iy$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{|z|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 = L_1 \quad \text{الان عندما يقترب } z \text{ من } 0 \text{ من الحور } x \text{ فأن } y = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{|z|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-iy}{iy} = -1 = L_2 \quad \text{وعندما يقترب } z \text{ من } 0 \text{ من الحور } y \text{ فأن } x = 0$$

$$\Rightarrow L_1 \neq L_2 \quad \text{اذن الغاية غير موجودة}$$

(9.2) الاستمرارية

تكون f الدالة مستمرة عند النقطة z_0 في D اذا حققت الشروط الاتية

$$(1) f(z_0) \text{ موجودة}$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ موجودة}$$

$$(3) f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

أي ان تكون الدالة $f(z) = w$ المعرفة بجوار النقطة z_0 انها مستمرة في النقطة z_0 اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد

$$\delta > 0 \text{ بحيث ان } |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ عندما } |z - z_0| < \delta$$

مبرهنة : إذا كانت الدالتان $f(z)$ و $g(z)$ مستمرتين عند النقطة z_0 فأن

- $f(z) \mp g(z) \Rightarrow$ مستمرة عند النقطة z_0
- $f(z).g(z) \Rightarrow$ مستمرة عند النقطة z_0
- $\frac{f(z)}{g(z)} \Rightarrow$ مستمرة عند النقطة z_0 بشرط $g(z) \neq 0$

مثال هل الدالة الاتية $f(z) = \frac{iz}{2}$ مستمرة عند النقطة $z_0 = 1$

الحل:

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$$

اذن الدالة مستمرة عند النقطة $z = 1$.

مثال هل الدالة الاتية $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ مستمرة عند النقطة $z_0 = 2i$

الحل:

$$f(2i) = \frac{1}{(2i)^2+4} \Rightarrow \text{غير موجودة (لماذا؟)}$$

اذن الدالة غير مستمرة عند النقطة $2i$