(10.2) المشتقة

لتكن f دالة منطلق تعريفها يحوي جوار النقطة z_0 ، فأن المشتقة عند النقطة z_0 تعرف بالشكل الاتي

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

او

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \qquad \Delta z = z - z_0$$

مثال اذا كانت $f(z) = z^2$ جد المشتقة باستخدام التعريف عند النقطة $1 + i$

الحل:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z(\Delta z) + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z + \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

$$f'(1 + i) = 2 + 2i$$

مثال اذا كانت $f(z) = \overline{z}$ اثبت ان المشتقة غير موجودة عند $z = 0$

الحل:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \overline{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(\Delta z)}}{\Delta z}$$

وباعتبار ان $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ، ينتج

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

الان عندما $\Delta z \to 0$ من على مسار يوازي المحور الحقيقي نحصل على $\Delta y = 0$ نعوض

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 = L_1$$

وعندما $\Delta z \to 0$ من على مسار يوازي المحور الخيالي نحصل على $\Delta x = 0$ نعوض

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1 = L_2$$

$$\Longrightarrow L_1 \neq L_2$$

اذن المشتقة غير موجودة

(11.2) قواعد الاشتقاق

(1) $\frac{d}{dz}(k) = 0$, ثابت k

(2) $\frac{d}{dz}\left(k\, f(z)\right) = kf'(z)$

(3) $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$

(4) $\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) \pm g'(z)$

(5) $\frac{d}{dz}[f(z).g(z)] = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$

(6) $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{[g(z)]^2}$

مثال اذا كانت $f(z) = 3z^2 + 2z + 4$ جد $f'(1-i)$

الحل:

$$f'(z) = 6z + 2$$

$$\Rightarrow f'(1-i) = 6 - 6i + 2 = 4 + 6i$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(12.2) علاقة المشتقة بالاستمرارية

مبرهنة : كل دالة f قابلة لاشتقاق عند النقطة z_0 تكون تلك الدالة مستمرة عند تلك النقطة.

البرهان : بما ان الدالة f قابلة لاشتقاق عند النقطة z_0 اذن $f(z_0)$ موجودة. الان

$$\lim_{\Delta z\to 0}[f(z+\Delta z)-f(z)]=\lim_{\Delta z\to 0}[f(z+\Delta z)-f(z)]\frac{\Delta z}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\left(\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right)(\Delta z)\right]$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.\lim_{\Delta z\to 0}(\Delta z)$$

$$=f'(z).0$$

$$=0$$

اذن نحصل على

$$\lim_{\Delta z\to 0}[f(z+\Delta z)-f(z)]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0} f(z+\Delta z)=f(z)$$

أي ان $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z)$ اذن الدالة مستمرة عند z_0.

عكس المبرهنة ليس دائما صحيح أي ان كل دالة مستمرة عند نقطة معينة ليس بضرورة تكون قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة ، مثال على ذلك $f(z)=\overline{z}$ دالة مستمرة عند جميع نقاط المستوي المعقد ولكن غير قابلة لاشتقاق عند $I(z)\neq 0$.

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

Exercises (7)

1. جد النقاط التي تكون فيها الدالة $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ غير مستمرة

2. هل الدالة الاتية مستمرة عند النقطة $z=i$

$$f(z)=\begin{cases}1+i\,, & z=i\\ \dfrac{1}{1-z}, & z\neq i\end{cases}$$

3. هل الدالة الاتية مستمرة عند النقطة $z=0$

$$f(z)=\begin{cases}0, & z=0\\ \dfrac{\overline{z}}{z}, & z\neq 0\end{cases}$$

4. اذا كانت $f(z)=z^3$ جد المشتقة باستخدام التعريف عند النقطة $(-i)$

5. اذا كانت $f(z)=|z|^2$ اثبت ان المشتقة غير موجودة عند $z=0$

6. اذكر مثال على دالة مستمرة عند نقطة معينة وغير قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة.

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

حل التمارين 7

1. جد النقاط التي تكون فيها الدالة $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ غير مستمرة

الحل: تكون الدالة غير مستمرة عندما تكون غير موجودة أي عندما يكون المقام يساوي صفر اذن

$$z^2+1=0 \Longrightarrow z^2=-1 \Longrightarrow z=\pm i$$

اذن النقاط تكون فيها فغير مستمرة هي $\{-i,i\}$

2. هل الدالة الاتية مستمرة عند النقطة $z=i$

$$f(z)=\begin{cases}1+i\,, & z=i\\ \dfrac{2}{1-z}, & z\neq i\end{cases}$$

الحل:

(1) $f(i)=1+i$

(2) $\lim\limits_{z\to i}\frac{2}{1-z}=\frac{2}{1-i}=\frac{2}{1-i}\frac{1+i}{1+i}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$

(3) $f(i)=\lim\limits_{z\to i}f(z)=1+i$

اذن الدالة مستمرة عند $z=i$

3. هل الدالة الاتية مستمرة عند النقطة $z=0$

$$f(z)=\begin{cases}0, & z=0\\ \dfrac{\overline{z}}{z}, & z\neq 0\end{cases}$$

الحل:

(1) $f(0)=0$

(2) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$

الان عندما يقترب z من 0 من الحور الحقيقي فأن $y=0$ فأن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{x}{x}=1=L_1$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

وعندما يقترب z من 0 من الحور الخيالي فأن $x = 0$ فأن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{-iy}{iy} = -1 = L_2$$

$$\Longrightarrow L_1 \neq L_2$$

اذن الغاية غير موجودة ، اذن الدالة غير مستمرة عند $z = 0$

4. اذا كانت $f(z) = z^3$ جد المشتقة باستخدام التعريف عند النقطة $(-i)$

الحل:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^3 - z^3}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^3 + 3z^2(\Delta z) + 3z(\Delta z)^2) + (\Delta z)^3 - z^3}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z[3z^2 + 3z(\Delta z) + (\Delta z)^2]}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}(3z^2 + 3z(\Delta z) + (\Delta z)^2) = 3z$$

$$f'(-i) = -3i$$

5. اذا كانت $f(z) = |z|^2$ اثبت ان المشتقة غير موجودة عند $z = 0$

الحل:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)} - z\overline{(z)}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\,\overline{(z)} + z\,\overline{(\Delta z)} + (\Delta z)\overline{(z)} + (\Delta z)\overline{(\Delta z)} - z\overline{(z)}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\,\overline{(\Delta z)}}{\Delta z} + \overline{(z)} + \overline{(\Delta z)}$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات