$$= \left(\lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\,\overline{(\Delta z)}}{\Delta z} \right) + \overline{(z)}$$

وباعتبار ان $z = x + iy$، $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ينتج

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+iy)(\Delta x - i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + (x - iy)$$

الان عندما $\Delta z \to 0$ من على مسار يوازي المحور الحقيقي نحصل على $\Delta y = 0$ نعوض

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+iy)(\Delta x)}{\Delta x} + (x - iy)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} 2x$$

$$= 2x = L_1$$

وعندما $\Delta z \to 0$ من على مسار يوازي المحور الخيالي نحصل على $\Delta x = 0$ نعوض

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+iy)(-i\Delta y)}{i\Delta y} + (x - iy)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} -(x+iy) + (x - iy)$$

$$= -2yi = L_2$$

بما ان $L_1 \neq L_2$

اذن المشتقة غير موجودة

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(13.2) معادلة كوشي- ريمان

الدالة $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ تكون قابلة للاشتقاق عند النقطة $z_0 = x_0 + y_0$ اذا حققت الشرطين الآتيين:

الشرط الأول: ان تكون جميع المشتقات الجزئية للدالتين u, v موجودة ومستمرة عند جوار z_0 في المنطقة D أي ان u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة عند جوار z_0 في المنطقة D.

الشرط الثاني: إذا حققت معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ويعبر عن المشتقة عند النقطة z اما بالصيغة $f'(z) = u_x + iv_x$ أو بالصيغة $f'(z) = v_y + iu_y$.

مثال بين فيما إذا كانت الدوال الاتية قابلة للاشتقاق ام لا؟

$(1)\ f(z) = z^2$, $(2)\ f(z) = \overline{z}$

الحل:

$(1)\ f(z) = z^2$,

$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة وكذلك الدالة تحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

اذن الدالة $f(z) = z^2$ قابلة للاشتقاق

$$f'(z) = u_x + iv_x \Longrightarrow f'(z) = 2x + i2y \Longrightarrow f'(z) = 2(x+iy) \Longrightarrow f'(z) = 2z$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(2) $f(z)=\overline{z}$,

$$f(z)=\overline{(x+iy)}=x-iy$$

$$u(x,y)=x \quad , \quad v(x,y)=-y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة ولكن الدالة لا تحقق معادلتي كوشي – ريمان لان

$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

اذن الدوال $f(z)=\overline{z}$ غير قابلة للاشتقاق .

(14.2) الدالة التحليلية

يقال ان الدالة $w=f(z)$ انها تحليلية في النقطة z_0 اذا كانت قابلة للاشتقاق في النقطة z_0 وفي جوار النقطة z_0 .

ويقال ان الدالة $w=f(z)$ انها تحليلية في المنطقة D اذا كانت تحليلية في جميع نقاط المنطقة D .

مثال عند أي نقطة تكون الدالة الاتية $f(z)=x^2+iy^2$ دالة تحليلية في المنطقة D

الحل:

$$f(z)=x^2+iy^2 \Longrightarrow \quad u(x,y)=x^2 \, , \quad v(x,y)=y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x, u_y, v_x, v_y موجودة ومستمرة ، اما بالنسبة معادلتي كوشي – ريمان فان

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

ولكي تكون $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ يجب ان $x=y$.

اذن تكون الدالة f تحليلية عندما يكون الجزء الحقيقي والخيالي متساويان أي $R\big(f(z)\big)=I(f(z))$.

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

مثال برهن ان الدالة الاتية $f(z)=|z|^2$ قابلة للاشتقاق عند $z=0$ ولكنها ليست تحليلية عند تلك النقطة

الحل: أولا نبرهن ان المشتقة موجودة عند $z=0$ (نستخدم التعريف لإيجاد المشتقة)

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\left(\overline{z}+\overline{\Delta z}\right)-z\overline{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\overline{z}+z\overline{\Delta z}+\Delta z\overline{z}+\Delta z\overline{\Delta z}-z\overline{z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\overline{\Delta z}+\Delta z\overline{z}+\Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\overline{z}+\overline{\Delta z} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

إذا كانت $z=0$ نعوض في المعادلة (1) نحصل

$$f'(0)=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{(0)\overline{\Delta z}}{\Delta z}+(0)+\overline{\Delta z}\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}=0$$

اذن المشتقة موجودة عند النقطة $z=0$ وتساوي $f'(0)=0$

الان نبرهن ان الدالة ليست تحليلية عند $z=0$ ، اي نبرهن المشتقة الدالة غير موجودة بجوار النقطة $z=0$

اذا كانت $z\neq 0$ وكانت Δz حقيقية أي ان $\Delta z=\Delta x$, اذن $\overline{\Delta z}=\Delta x$ نعوض في المعادلة (1) نحصل

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\overline{z}+\overline{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z\Delta x}{\Delta x}+\overline{z}+\Delta x=z+\overline{z}$$

$$f'(z)=z+\overline{z} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

اما اذا كانت Δz خيالية أي ان $\Delta z=i\Delta y$ اذن $\overline{\Delta z}=-i\Delta y$ نعوض في المعادلة (*) نحصل

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\overline{z}+\overline{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-iz\Delta y}{i\Delta y}+\overline{z}-i\Delta y=-z+\overline{z}$$

$$f'(z)=-z+\overline{z} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

بما ان المعادلتين (2) و(3) غير متساويتين فأن المشتقة غير موجودة بجور النقطة $z=0$.

اذن الدالة ليست تحليلية عند $z=0$.

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(15.2) الدالة الكلية

ويقال ان الدالة $w = f(z)$ انها كلية اذا كانت تحليلية في جميع نقاط المستوي المعقد .

مثال هل الدالة الاتية $f(z) = z^2$ كلية

الحل: الدالة تحليلية في جميع نقاط المستوي المعقد اذن الدالة كلية.

(16.2) النقاط الشاذة

تكون الدالة $w = f(z)$ تحليلية في جوار النقطة z_0 ماعدا عند z_0 نفسها فأن النقطة z_0 تسمى نقطة شاذة .

مثال جد النقاط الشاذة الدالة الاتية $w = f(z) = \frac{z+1}{z-1}$

الحل: $f'(z) = \frac{2}{(z-1)^2}$

اذن المشتقة غير موجودة عند النقطة $z = 1$ ، اذن النقطة الشاذة هي $\{1\}$.

ملاحظات :

(1) دالة متعدد الحدود تكون تحليلية لجميع نقاط المستوى المعقد، أي انها تكون دالة كلية.

(2) اذا كانت الدالة $w = f(z)$ التحليلية في المنطقة D فأن الدالة $f(z)$ تحقق معادلتي كوشي – ريمان.

(3) اذا كانت الدالتان $g(z), f(z)$ دوال تحليلية في المنطقة D فأن كلا من يأتي دوال تحليلية :

$$f(z) \pm g(z)\,, \qquad f(z).g(z) \qquad , \qquad \frac{f(z)}{g(z)}\,, g(z) \neq 0$$

Exercises (8)

(1) بين فيما إذا كانت الدوال الاتية قابلة للاشتقاق ام لا؟

(I) $f(z) = e^{\overline{z}}$, **(II)** $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

(2) بين فيما إذا كانت الدوال الاتية تحليلية ام لا؟

(I) $f(z) = e^{z}$, **(II)** $f(z) = xy + iy$

(3) هل الدالة $f(z) = e^z$ دالة كلية ؟

(4) اثبت ان الدالة $f(z) = (\overline{z})^2$ ليست دالة كلية؟

(5) جد النقاط الشاذة للدالة الاتية $f(z) = \frac{z+2}{z-2}$

(6) برهن اذا كانت الدالة $w = f(z)$ التحليلية في المنطقة D فأن الدالة تحقق معادلتي كوشي – ريمان.

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

حل التمارين 8

(1) بين فيما إذا كانت الدوال الاتية قابلة للاشتقاق ام لا؟

(I) $f(z)=e^{\overline{z}}$, **(II)** $f(z)=3x+y+i(3y-x)$

الحل:

(I) $f(z)=e^{\overline{z}}=e^{x-iy}=e^{x}e^{-iy}$

$$=e^{x}(\cos y-i\sin y)$$

$$u(x,y)=e^{x}\cos y \quad , \qquad v(x,y)=-e^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y \quad , \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-e^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y \quad , \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-e^{x}\cos y$$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x,u_y,v_x,v_y موجودة ومستمرة ولكن الدالة لا تحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$$

اذن الدالة $f(z)=e^{\overline{z}}$ غير قابلة للاشتقاق.

(II) $f(z)=3x+y+i(3y-x)$

$$u(x,y)=3x+y \quad , \qquad v(x,y)=3y-x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3 \quad , \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=1 \quad , \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=3$$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x,u_y,v_x,v_y موجودة ومستمرة وايضاً الدالة تحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=1$$

اذن الدالة $f(z)=3x+y+i(3y-x)$ قابلة للاشتقاق.

$f'(z)=u_x+iv_x \Longrightarrow \ f'(z)=3-i$.

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات