(2) بين فيما إذا كانت الدوال الاتية تحليلية ام لا؟

(I) $f(z)=e^{z}$, **(II)** $f(z)=xy+iy$

الحل:

(I) $f(z)=e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

$u(x,y)=e^{x}\cos y$, $v(x,y)=e^{x}\sin y$

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y$

اذنن جميع المشتقات الجزئية u_x,u_y,v_x,v_y موجودة ومستمرة الدالة تحقق معادلتي كوشي – ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{x}\sin y$$

اذن الدالة $f(z)=e^{z}$ دالة تحليلية.

(3) بين فيما إذا كانت الدوال $f(z)=e^{z}$ كلية ام لا؟

الحل: الدالة تحليلية $f(z)=e^{z}$ في جميع نقاط المستوي المعقد اذن الدالة كلية.

(4) اثبت ان الدالة $f(z)=(\overline{z})^{2}$ ليست دالة كلية؟

الحل: $f(z)=\left(\overline{x+iy}\right)^{2}=f(z)=(x-iy)^{2}=x^{2}-y^{2}-2ixy$

$u(x,y)=x^{2}-y^{2},\qquad v(x,y)=-2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-2y$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-2x$

اذن جميع المشتقات الجزئية u_x,u_y,v_x,v_y موجودة ومستمرة ، والدالة لا معادلتي كوشي – ريمان لان

$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}\quad,\quad \frac{\partial v}{\partial x}\neq-\frac{\partial u}{\partial y}$$

اذن الدالة ليست تحليلية اذن الدالة ليست كلية

(5) جد النقاط الشاذة الدالة الاتية $f(z)=\frac{z+2}{z-2}$

الحل: اذن المشتقة غير موجودة عند النقطة $z=2$ النقاط الشاذة هي $\{2\}$

(17.2) الدوال التوافقية

الدالة $u(x,y)$ تكون دالة توافقية اذا حققت الشرطين الآتيين:

الشرط الأول: ان تكون جميع المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة u موجودة ومستمرة في المنطقة D أي ان

الشرط الثاني: تحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ملاحظات:

اذا كانت الدالة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ التحليلية في المنطقة D فأن الدالة $f(z)$ فأن كلاً من $u(x,y)\,,v(x,y)$ دوال توافقية.

اذا كانت الدالة $u(x,y)$ **دالة توافقية** فأن الدالة $v(x,y)$ تسمى **مرافق توافقي** للدالة $u(x,y)$.

مثال اثبت ان الدالة $u(x,y)=y^3-3x^2y$ دالة توافقية:

الحل:

$$u_x=-6xy \quad , \quad u_y=3y^2-3x^2$$

$$u_{xx}=-6y \quad , \quad u_{yy}=6y$$

$$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=6y-6y=0$$

بما ان جميع المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة والدالة تحقق معادلة لابلاس ، اذن الدالة u دالة توافقية .

مثال اذا كنت دالة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ التحليلية جد المرافق التوافقي الدالة:

$$u(x,y)=y^3-3x^2y$$

الحل: بما ان الدالة $f(z)$ تحليلية اذن تحقق معادلتي كوشي– ريمان

$$u_x=v_y=-6xy$$

الان نكامل v_y بالنسبة لـ y لنحصل على $v(x,y)$ اذن

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

$$v(x,y)=\int -6xy\,dy=-6x\frac{(y)^2}{2}+q(x)$$

$$v(x,y)=-3xy^2+q(x) \quad \dots\dots\dots(1)$$

(ملاحظة اضفنا الدالة $q(x)$ وليس ثابت C وذلك لان الدالة $v(x,y)$ ذات المتغيرين.)

الان نجد الدالة $q(x)$ وذلك عن طريق اشتقاق الدالة $v(x,y)$ بالنسبة لـ x لنحصل

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+\frac{dq}{dx}$$

من معادلة كوشي ريمان $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ نحصل

$$3y^2-3x^2=3y^2-\frac{dq}{dx}$$

بمقارنة الطرفين نحصل على $\frac{dq}{dx}=3x^2$ نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على

$$q(x)=\int 3x^2dx=x^3+C \quad \dots\dots\dots(2)$$

(ملاحظة اضفنا ثابت C وذلك لان الدالة $q(x)$ ذات متغير واحد) ، نعوض (2) في (1) لنحصل على الدالة v

$$v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$$

مثال اذا كنت $v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$, $u(x,y)=y^3-3x^2y$ اكتب $f(z)$ بدلالة المتغير z:

الحل:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$=(y^3-3x^2y)+i(-3xy^2+x^3+C)$$

$$=y^3-3x^2y-3ixy^2+ix^3+iC$$

$$=i[(x^3-3x^2y+3ixy^2+iy^3)+C]$$

$$=i[(x+iy)^3+C]=i(z^3+C)$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

مثال اذا كنت دالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ التحليلية جد المرافق التوافقي الدالة:

$$u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$$

الحل: بما ان الدالة $f(z)$ تحليلية اذن تحقق معادلتي كوشي- ريمان

$$u_x = v_y = 2 - 3x^2 + 3y^2$$

الان نكامل v_y بالنسبة لـ y لنحصل على $v(x,y)$ اذن

$$v(x,y) = \int 2 - 3x^2 + 3y^2 \, dy$$

$$v(x,y) = 2y - 3yx^2 + y^3 + q(x) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

الان نجد الدالة $q(x)$ وذلك عن طريق اشتقاق الدالة $v(x,y)$ بالنسبة لـ x لنحصل

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -6yx + \frac{dq}{dx}$$

من معادلة كوشي ريمان $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ نحصل

$$6xy = -\left(-6yx + \frac{dq}{dx}\right)$$

بمقارنة الطرفين نحصل على $\frac{dq}{dx} = 0$ نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على

$$q(x) = C \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1) لنحصل على الدالة $v(x,y)$, وكما يلي:

$$v(x,y) = 2y - 3yx^2 + y^3 + C$$

Exercises (9)

اذا كانت الدوال الاتية

(I) $u(x,y) = 2x(1-y)$, **(II)** $v(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y)$

1. هل معادلة لابلاس تحقق لهذه الدوال:
2. جد المرافق التوافقي لكل دالة:

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

حل التمارين 9

(I) $u(x,y) = 2x(1-y)$

الحل

1. هل المعادلة تحقق معادلة لابلاس

$u_x = 2(1-y)$, $u_y = -2x$

$u_{xx} = 0$, $u_{yy} = 0$ $\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 - 0 = 0$

اذن الدالة $u(x,y) = 2x(1-y)$ تحقق معادلة لابلاس.

2. إيجاد المرافق التوافقي

$u_x = v_y = 2(1-y)$:

الان نكامل v_y بالنسبة لـ y لنحصل على $v(x,y)$ اذن

$$v(x,y) = \int 2(1-y)\,dy$$

$$v(x,y) = 2y - y^2 + q(x) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

الان نجد الدالة $q(x)$ وذلك عن طريق اشتقاق الدالة $v(x,y)$ بالنسبة لـ x لنحصل

$$v_x = q'(x)$$

من معادلة كوشي ريمان $u_y = -v_x$ نحصل

$$-2x = -q'(x)$$

بمقارنة الطرفين نحصل على $q'(x) = 2x$ نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على

$$q(x) = \int 2x dx = x^2 + C \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1) لنحصل على الدالة v

$$v(x,y) = 2y - y^2 + x^2 + C$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات

(II) $u(x,y) = e^{-x}(\cos y + \sin y)$

الحل

1. هل المعادلة تحقق معادلة لابلاس

$$\Rightarrow u(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-x}\sin y$$

$$u_x = -e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y \quad , \quad u_y = -e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y$$

$$u_{xx} = e^{-x}\cos y + e^{-x}\sin y \quad , \quad u_{yy} = -e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y$$

$$\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = e^{-x}\cos y + e^{-x}\sin y - e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y = 0$$

اذن الدالة $u(x,y) = e^{-x}(\cos y + \sin y)$ تحقق معادلة لابلاس.

2. إيجاد المرافق التوافقي

$$u_x = v_y = -e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y$$

الان نكامل v_y بالنسبة لـ y لنحصل على $v(x,y)$ اذن

$$v(x,y) = \int -e^{-x}\cos y - e^{-x}\sin y\, dy$$

$$v(x,y) = -e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y + q(x) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

الان نجد الدالة $q(x)$ وذلك عن طريق اشتقاق الدالة $v(x,y)$ بالنسبة لـ x لنحصل

$$v_x = e^{-x}\sin y - e^{-x}\cos y + q'(x)$$

من معادلة كوشي ريمان $u_y = -v_x$ نحصل :

$$u_y = -v_x$$

$$-e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y = -[e^{-x}\sin y - e^{-x}\cos y + q'(x)]$$

$$-e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y = -e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y - q'(x)$$

بمقارنة الطرفين نحصل على $q'(x) = 0$ نكامل بالنسبة لـ x لنحصل على

$$q(x) = C \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في (1) لنحصل على الدالة v

$$v(x,y) = -e^{-x}\sin y + e^{-x}\cos y + C$$

أعداد: د. ربيع دارغوث /جامعة الموصل/ كلية التربية الأساسية / قسم الرياضيات