م/ مشتقات الدوال المثلثية :

- f(x) = sin الزاوية → $f'(x)$ = مشتقه الزاوية . cos نفس الزاوية
- f(x) = cos الزاوية → $f'(x)$ = - مشتقه الزاوية . sin نفس الزاوية
- f(x) = tan الزاوية → $f'(x)$ = مشتقه الزاوية . $\sec^2$ نفس الزاوية
- f(x) = cot الزاوية → $f'(x)$ = - مشتقه الزاوية . $\csc^2$ نفس الزاوية
- f(x) = sec الزاوية → $f'(x)$ = مشتقه الزاوية . tan نفس الزاوية . sec نفس الزاوية
- f(x) = csc الزاوية → $f'(x)$ = - مشتقه الزاوية .cot نفس الزاوية . csc نفس الزاوية

ملاحظة : كل دالة يراد اشتقاقها يبدأ ب C نضع الاشارة السالبة في الجواب

م. علاء المساعد

مثال: جد $f'(x)$ للدالة : $f(x) = \sin x$

الجواب:

$$f'(x) = \cos x$$

مثال: جد y' للدالة : $y = \cos x$

الجواب:

$$y'(x) = -\sin x$$

مثال/ اذا كانت $y = tanx$ فجد y'

الجواب:

$$y' = sec^2 x$$

مثال/ اذا كانت $y = \cot x$ فجد y'

الجواب:

$$y' = -cec^2 x$$

مثال/ اذا كانت $y = \sec x$ فجد y'

الجواب:

$$y' = \sec x \ . \ tna\ x$$

مثال/ اذا كانت $y = \csc x$ فجد y'

الجواب:

$$y' = -\csc x \ . \ \cot x$$

م.م. علاء المساعد

مثال/ جد $f'(x)$ للدالة : $f(x) = \sin 2\ x$

الجواب:

$$f'(x) = 2\cos x$$

مثال / جد y' للدالة : $y = \cos 4\ x$

الجواب:

$$y'(x) = -4\ \sin 4x$$

مثال/ اذا كانت $y = \tan 4x^2$ فجد y'

الجواب:

$$y' = 8\sec^2 4x^2$$

مثال/ اذا كانت $y = \cot (4x^2 + x)$ فجد y'

الجواب:

$$y' = -(8x + 1)\ \csc^2 x$$

مثال/ اذا كانت $y = \sec 6\ x$ فجد y'

الجواب:

$$y' = -6\sec x\ .\ \tan x$$

مثال/ اذا كانت $y = \csc \frac{2}{5}\ x$ فجد y'

الجواب:

$$y' = -\frac{2}{5}\ \csc x\ .\ \cot x$$

م.م. علاء المساعد

مثال: جد $f'(x)$ للدالة : $f(x) = sin^2 x$

الجواب:

$$f(x) = sin^2 x \quad \rightarrow \quad f(x) = (sin\, x)^2$$

$$f'(x) = 2 \sin x \ cos\, x$$

مثال: جد $f'(x)$ للدالة : $f(x) = cos^4 x$

الجواب:

$$f(x) = cos^4 x \ \rightarrow \quad f(x) = (cos\, x)^4$$

$$f'(x) = -4(cos\, x)^3 sin\, x$$

مثال: جد $f'(x)$ للدالة : $f(x) = \sqrt{sinx}$

الجواب:

$$f(x) = \sqrt{sinx} \quad \rightarrow \quad f(x) = (\sin x)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^{-1/2} cos\, x$$

مثال/ اذا كانت $y = tanx - x$ فجد y'

الجواب:

$$y' = sec^2 x - 1$$

مثال: جد y' للدالة : $y = cos\sqrt{x}$

الجواب:

$$y'(x) = -\frac{1}{2} \ . \ x^{-\frac{1}{2}} \ . \ sin\sqrt{x}$$

المشتقات ذات الرتب العليا

(Higher-Order Derivatives)

عندما نشتق دالة f(x) مرة واحدة، نحصل على المشتقة الأولى $f'(x)$ ، وهي تمثل معدل التغير اللحظي للدالة.

لكن في كثير من التطبيقات نحتاج لمعرفة كيفية تغيّر هذا المعدل نفسه، ولذلك نعيد عملية الاشتقاق مرة أخرى لنحصل على مشتقات أعلى.

- المشتقة الأولى : هي مشتقة الدالة الأساسية:

$$\text{المشتقة الاولى} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

- المشتقة الثانية : هي مشتقة المشتقة الأولى:

$$\text{المشتقة الثانية} = f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

- المشتقة الثالثة : هي مشتقة المشتقة الثانية:

$$\text{المشتقة الثالثة} = f'''(x) = y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

- المشتقة الرابعة : هي مشتقة المشتقة الثالثة:

$$\text{المشتقة الثالثة} = f^4(x) = y^4 = \frac{d^4y}{dx^4}$$

وهكذا نستمر بالاشتقاق أي رتبة مطلوبة .

* المشتقات ذات الرتب العليا تستخدم في:

الفيزياء ، الهندسة ، التحليل العددي ، دراسة سلوك الدوال بدقة أكبر

* فائدة المشتقات ذات الرتب العليا

اولا: تحليل شكل المنحنى (تقعر وتحدّب).

ثانيا: تحديد نقاط الانعطاف للدوال.

ثالثا: حل المعادلات التفاضلية.

رابعا: تطبيقات هندسية: مثل نماذج السرعة، التسارع، والاهتزازات.

مثال/ تطبيقي سريع لو كان لدينا الدالة $f(x) = \sin x$

المشتقة الأولى = $\cos x$

المشتقة الثانية = $-\sin x$

المشتقة الثالثة = $-\cos x$

المشتقة الرابعة = $\sin x$

المشتقة الخامسة = $\cos x$

وهكذا .....

مثال/ جد $f''(x)$ للدالة : $f(x) = \sin \pi x$

الجواب:

$$f'(x) = \pi \cos \pi x$$

$$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$$

مثال/ جد y'' للدالة: $y = \cos 2x$

الجواب:

$$y'(x) = -2 \sin 2x$$

$$y''(x) = -4 \cos 2x$$

مثال/ اذا كانت $y = tanx$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

الجواب:

$$\frac{d\,y}{dx} = sec^2\, x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \sec x \ (\sec x \tan x \ )$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \ \tan x \sec^2 x$$

م.م. علاء المساعد

الاشتقاق الضمني

(Implicit Differentiation)

- ما هو الاشتقاق الضمني؟

الاشتقاق الضمني هو طريقة لاستخراج المشتقة عندما تكون الدالة معطاة بشكل غير صريح على صورة: $y = f(x)$

(اي لا تكون y بشكل صريح في طرف واحد من المعادلة بمعنى اخر عندما تكون لدينا علاقة بين x و y مختلطة معا ولا يمكن جعل y وحدها قبل الاشتقاق)

مثل : $x^2 + xy + y^2 = 7$

- لماذا نستخدم الاشتقاق الضمني؟

نستخدمه عندما:

اولا: يصعب أو يستحيل حل بدلالة .

ثانيا: تكون الدالة معقّدة جدًا عند إعادة ترتيبها.

ثالثا: تكون العلاقة من النوع: دوائر، قطع زائد، قطع مكافئ مائل، منحنيات معقّدة.

- متى تكون المشتقة الضمنية مهمة؟

اولا: دراسة المنحنيات المعقّدة.

ثانيا: إيجاد ميل المماس في منحنيات غير صريحة.

ثالثا: تطبيقات هندسية (منحنيات القطع المخروطي).

رابعا: الفيزياء عندما تكون العلاقات بين المتغيرات غير صريحة.

خامسا: العثور على (المشتقة الثانية) لعلاقات غير صريحة.

م.م. علاء المساعد

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $x^2 - 3xy^2 + 5y = 3$

الجواب:

$$2x - 3(2xy\frac{dy}{dx} + y^2) + 10\, y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - 6xy\frac{dy}{dx} - 3y^2 + 10\, y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$- 6xy\frac{dy}{dx} + 10\, y \frac{dy}{dx} = 3y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 2x}{- 6xy + 10\, y}$$

اذا يطلب جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=1$ و $y = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2)^2 - 2(1)}{- 6(1)(2) + 10\,(2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 - 2}{- 12 + 20}$$

$$\frac{dy}{dx} = 10/8 = 5/4$$