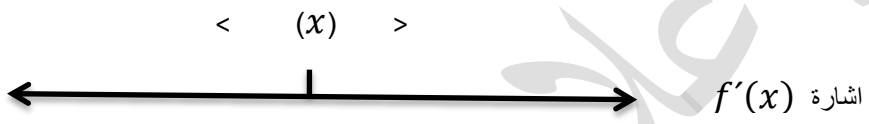
اختبار التزايد والتناقص وايجاد النهايات المحلية باستخدام المشتقة الاولى:

- تكون طريقة الحل كما يلي:

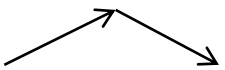
١-نجد المشتقة الاولى (نجد $f'(x)$) ثم نساويها بالصفر لنجد قيم (x).

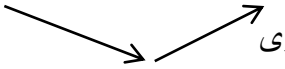
٢- نعوض قيم (x) في الدالة الاصلية لنجد قيم (y) ونحصل على نقطة حرجه من (x,y).

٣-نضع قيم (x) على خط الاعداد :



ونأخذ قيم اكبر واصغر من قيمة (x) ونعوضها في المشتقة الاولى $(f'(x))$ لمعرفة الاشارات على خط الاعداد هل هي تزايد (+) ام نقصان (-). فاذا كانت:





+ + لا يوجد نقطة نهاية محلية والدالة متزايدة في مجالها

− − لا يوجد نقطة نهاية محلية والدالة متناقصة في مجالها

سؤال : جد التزايد والتناقص ونقط النهايات المحلية للدالة : $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

الجواب:

$$f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$$

$$0 = 9 + 6x - 3x^2 \qquad \div 3$$

$$0 = 3 + 2x - x^2$$

$$0 = (3 - x)(1 + x)$$

اما $x = 3$

او $x = -1$

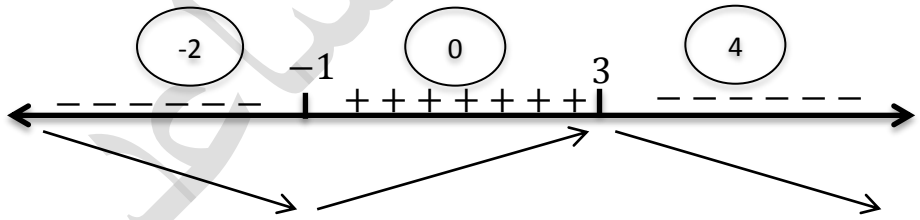
نعوض قيم (x) في الدالة الاصلية لنجد النقط الحرجه

عند $x = 3 \quad \Rightarrow f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3 = 27 + 27 - 27 = 27$

النقطة الحرجه $(3,27)$

عند $x = -1 \quad \Rightarrow f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$

النقطة الحرجه $(-1, -5)$



اشارة $f'(x)$

$f'(-2) = (-2)\ 9 + 6(-2) - 3(-2)^2 = 9 - 12 - 12 = -15$

$f'(0) = (0)9 + 6(0) - 3(0)^2 = 9$

$f'(4) = (4)9 + 6(4) - 3(4)^2 = 9 + 24 - 48 = -15$

الدالة متناقصة عند $(x > 3)$ و$(x < -1)$

الدالة متزايدة في الفترة المفتوحة (-1,3)

النقطة (3,27) نهاية عظمى محلية

النقطة $(-1, -5)$ نهاية صغرى محلية

سؤال : جد التزايد والتناقص ونقط النهايات المحلية للدالة : $f(x) = 1 - (x-2)^2$

الجواب:

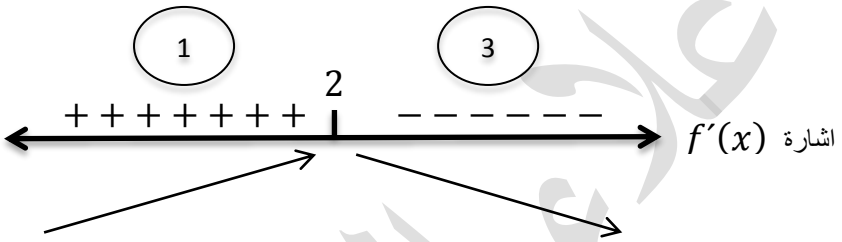
$$f'(x) = 0 - 2(x-2)(1) = -2(x-2)$$

$$0 = -2(x-2) \ \} \ \div -2$$

$$0 = x - 2 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

نعوض قيمة (x) في الدالة الاصلية لنجد النقطة الحرجه

$f(2) = 1 - (2-2)^2 = 1 \quad \Rightarrow$ النقطة الحرجه $(2,1)$



$f'(1) = (1) - 2(1-2) = -2(-1) = 2$

$f'(3) = (3) - 2(3-2) = -2(1) = -2$

الدالة متزايدة عند $(x < 2)$

الدالة متناقصة في عند $(x > 2)$

النقطة $(2,1)$ نهاية عظمى محلية

سؤال : جد التزايد والتناقص ونقط النهايات المحلية للدالة : $f(x) = 2x - 3$

الجواب:

$$f'(x) = 2$$

$$0 \neq 2$$

الدالة متزايدة في مجالها ولا يوجد نهاية محلية

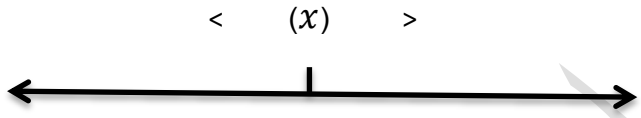
مناطق التقعر والتحدب ونقط الانقلاب للدالة:

- تكون طريقة الحل كما يلي:

١- نجد المشتقة الثانية (نجد $f''(x)$) ثم نساويها بالصفر لنجد قيم (x).

٢- نعوض قيم (x) في الدالة الاصلية لنجد قيم (y) ونحصل على نقطة من (x, y)

٣- نضع قيم (x) على خط الاعداد



ونأخذ قيم اكبر واصغر من قيمة (x) ونعوضها في المشتقة الثانية $(f''(x))$ لمعرفة الاشارات على خط الاعداد فإذا كان :

+ تقعر + U

– تحدب –∩

– + او + – نقطة انقلاب

+ + لا يوجد نقطة انقلاب والدالة مقعرة في مجالها

– – لا يوجد نقطة انقلاب والدالة محدبة في مجالها

م.م. علاء المساعد

السؤال: جد مناطق التقعر والتحدب ونقط الانقلاب ان وجدت للدالة $f(x) = 4x^3 - x^4$

الجواب:

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f''(x) = 24x - 12x^2$

$0 = 24x - 12x^2$

$0 = 24x - 12x^2$

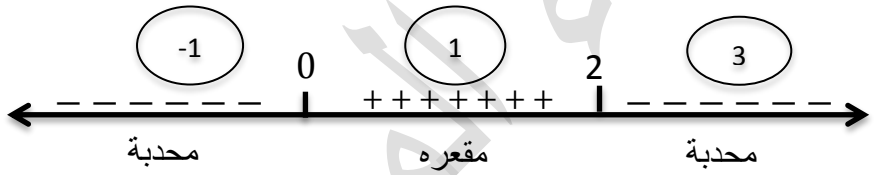
$0 = 12x(2 - x)$

اما $12x = 0 \Rightarrow x = 0$

او $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(0) = 4(0)^3 - (0)^4 = 0 \Rightarrow (0,0)$ النقطه

$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4 = 32 - 16 = 16 \Rightarrow (2,16)$ النقطه



اشارة $f''(x)$

f(-1)= $24(-1) - 12(-1)^2 = -24 - 12 = -36$

f(+1)= $24(1) - 12(1)^2 = 24 - 12 = 12$

f(+3)= $24(3) - 12(3)^2 = 72 - 108 = -36$

الدالة محدبة عند $(x > 2)$ و $(x < 0)$

الدالة مقعرة في الفترة $(0,2)$

∴ نقط الانقلاب هما $(0,0), (2,16)$

السؤال: جد مناطق التقعر والتحدب ونقط الانقلاب ان وجدت للدالة $f(x) = x - 3x^2$؟

الجواب:

$f'(x) = 1 - 6x$

$f''(x) = 0 - 6$

$0 \neq -6$

الدالة محدبة في مجالها ولا يوجد نقطة انقلاب

السؤال: جد مناطق التقعر والتحدب ونقط الانقلاب ان وجدت للدالة $f(x) = 4 - (x+2)^4$

الجواب:

$$f'(x) = 0 - 4(x+2)^3(1) = -4(x+2)^3$$

$$f''(x) = -12(x+2)^2(1) = -12(x+2)^2$$

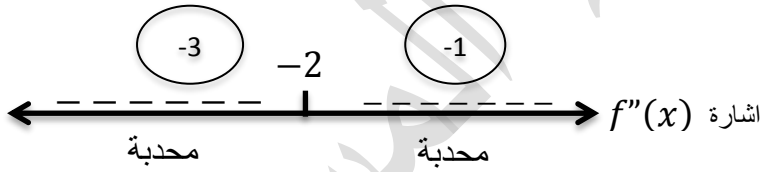
$$0 = -12(x+2)^2 \quad \} \div -12$$

$0 = (x+2)^2$ جذر الطرفين

$$0 = x + 2 \qquad \Rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = 4 - (-2+2)^4 = 4$$

اذن النقطة $(-2,4)$



f(-3)= $-12(-3+2)^2 = -12(-1)^2 = -12$

f(-1)= $-12(-1+2)^2 = -12(1)^2 = -12$

الدالة محدبة عند $(x > -2)$ و $(x < -2)$

ولا توجد نقطة انقلاب للدالة وهي محدبة في مجالها

رسم المخطط البياني للدالة:

لرسم المخطط البياني للدالة يجب ان نطبق الخطوات التالية :

اولا: اوسع مجال للدالة : يكون اوسع مجال للدالة هو R اذا كانت كثيرة الحدود (ليست نسبية) ويكون اوسع مجال هو $R - \{$قيمة $x\}$ اذا كانت كسر (نسبية) وذلك عن طريق مساواة المقام بالصفر ونجد قيمة (x)

ثانيا: التناظر :

* اما حول نقطة الاصل : اذا كانت الاسس لـ (x) فردية وكانت خالية من الثابت (عدم وجود عدد$\mp$) لان $f(-x) = -f(x)$

* او حول محور الصادات : اذا كانت الاسس لـ (x) زوجية وكانت محتوية على الثابت او عدم وجوده لان $f(-x) = f(x)$

* او لا يوجد تناظر : اذا كانت الاسس فردية وزوجيه او كانت اسس فرديه وعدد ثابت لان

$f(-x) \neq -f(x)$ و $f(-x) \neq f(x)$

ثالثا: التقاطع مع المحورين :

a) مع محور الصادات : $(x = 0)$ ونعوضها بالدالة الاصلية لنجد قيمة (y) ونجد نقطة التقاطع من $(0, y)$

b) مع محور السينات : $(y = 0)$ ونعوضها بالدالة الاصلية لنجد قيمة (x) ونجد نقطة التقاطع من $(x, 0)$

رابعا: المحاذيات :

* اذا كانت كثيرة الحدود (ليست نسبية) : لا يوجد محاذيات لانها ليست نسبية

* اما اذا كانت كسر (نسبية) فان لها محاذيان وهما :

a) المحاذي العمودي : (قيمة x) ناخذ المقام ونساويه بالصفر ونجد (قيمة x)

b) المحاذي الافقي : (قيمة y) ويكون بالقاعدة $y = \frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$

خامسا: النهايات المحلية ونقط الانقلاب (نجد $f'(x), f''(x)$) :

سادسا: نجد نقط اضافية ان احتجنا الى ذلك وبعددها يتم الرسم:

سؤال: ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة $f(x) = x^5$

الجواب:

اولا: اوسع مجال للدالة هو R

ثانيا: التناظر : حول نقطة الاصل : لان $f(-x) = -f(x)$

ثالثا: التقاطع مع المحورين :

a) مع محور الصادات $(x = 0)$

$$f(0) = (0)^5 = 0 \Rightarrow (0,0)$$

b) مع محور السينات $(y = 0)$

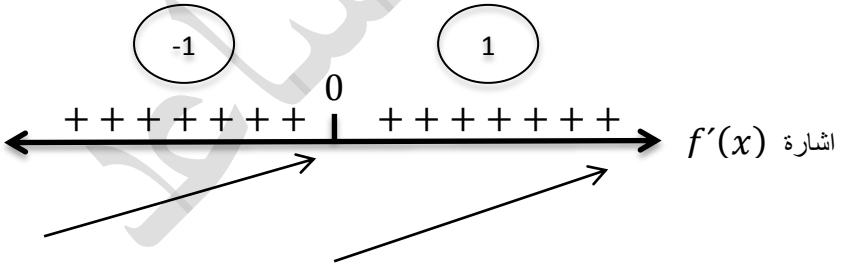
$$0 = x^5 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$$

رابعا: المحاذيات :لا يوجد محاذيات لانها ليست نسبية

خامسا: نجد النهايات المحلية ونقط الانقلاب (نجد $f'(x), f''(x)$)

$$f'(x) = 5x^4$$

$0 = 5x^4 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة حرجة



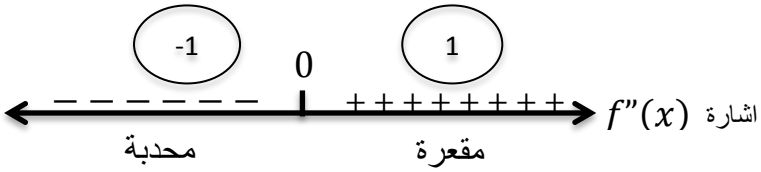
f(-1)= $5(-1)^4 = +5$

f(1)= $5(1)^4 = +5$

الدالة متزايدة عند $(x < 0)$ و $(x > 0)$ لا توجد نقطة نهاية محلية

$f''(x) = 20x^3$

$0 = 20x^3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$



الدالة محدبة عند $(x < 0)$
الدالة مقعرة عند $(x > 0)$

$f(1) = 20(1)^3 = +20$

$f(-1) = 20(-1)^3 = -20$

النقطة $(0,0)$ انقلاب

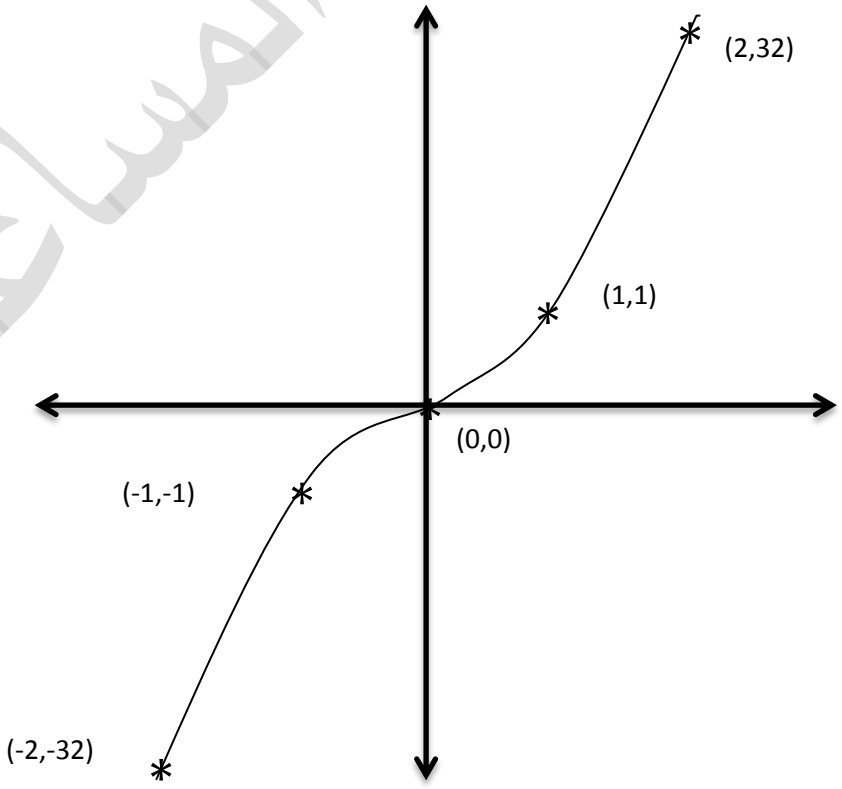
٦) نجد نقط اضافية نفرض قيم لـ (x)

$x = 1 \Rightarrow f(1) = (1)^5 = 1 \quad \Rightarrow (1,1)$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^5 = -1 \quad \Rightarrow (-1,-1)$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = (2)^5 = 32 \quad \Rightarrow (2,32)$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^5 = -32 \quad \Rightarrow (-2,-32)$



سؤال: ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة $f(x) = 6x - x^3$

الجواب:

اولا: اوسع مجال للدالة هو R

ثانيا: التناظر : الدالة متناظرة حول نقطة الاصل : لان $f(-x) = -f(x)$

ثالثا: التقاطع مع المحورين :

a) مع محور الصادات $(x = 0)$ $f(0) = 6(0) - (0)^3 = 0 \Rightarrow (0,0)$

b) مع محور السينات $(y = 0)$ $0 = 6x - x^3$

$0 = x(6 - x^2)$

اما $x = 0 \Rightarrow (0,0)$

او $x^2 = 6 \Rightarrow x = \mp\sqrt{6} \Rightarrow (\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$

رابعا: المحاذيات :لا يوجد محاذيات لانها ليست نسبية

خامسا: نجد النهايات المحلية ونقط الانقلاب (نجد $f'(x), f''(x)$)

$f'(x) = 6 - 3x^2$

$0 = 6 - 3x^2$

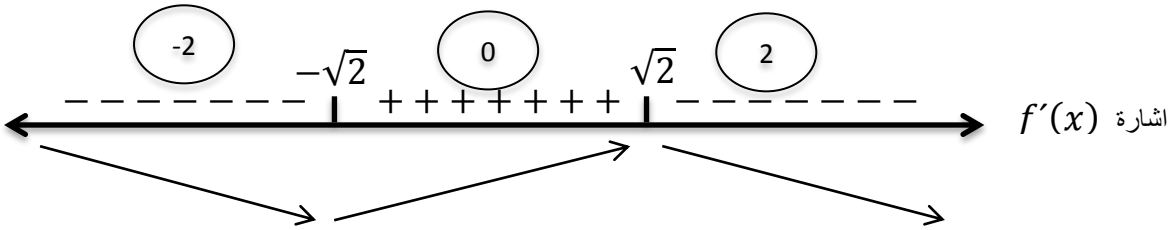
$3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$

$f(\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^3 = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow (\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ نقطة حرجة

$f(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3 = -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$

$\Rightarrow (-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ نقطة حرجة



f(-2)= $6 - 3(-2)^2 = 6 - 12 = -6$

f(0)= $6 - 3(0)^2 = 6 - 0 = 6$

f(2)= $6 - 3(2)^2 = 6 - 12 = -6$

الدالة متناقصة عند $(x < -\sqrt{2})$ و $(x > \sqrt{2})$

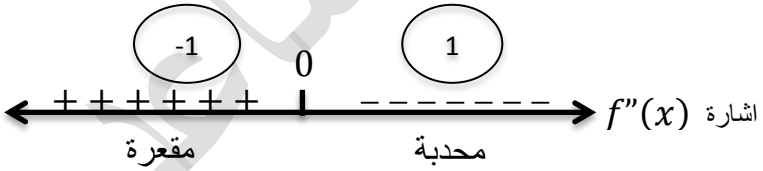
الدالة متزايدة في الفترة المفتوحة $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$\therefore \left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$\therefore \left(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$f''(x) = -6x$

$0 = -6x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$



f(-1)= $-6(-1) = 6$

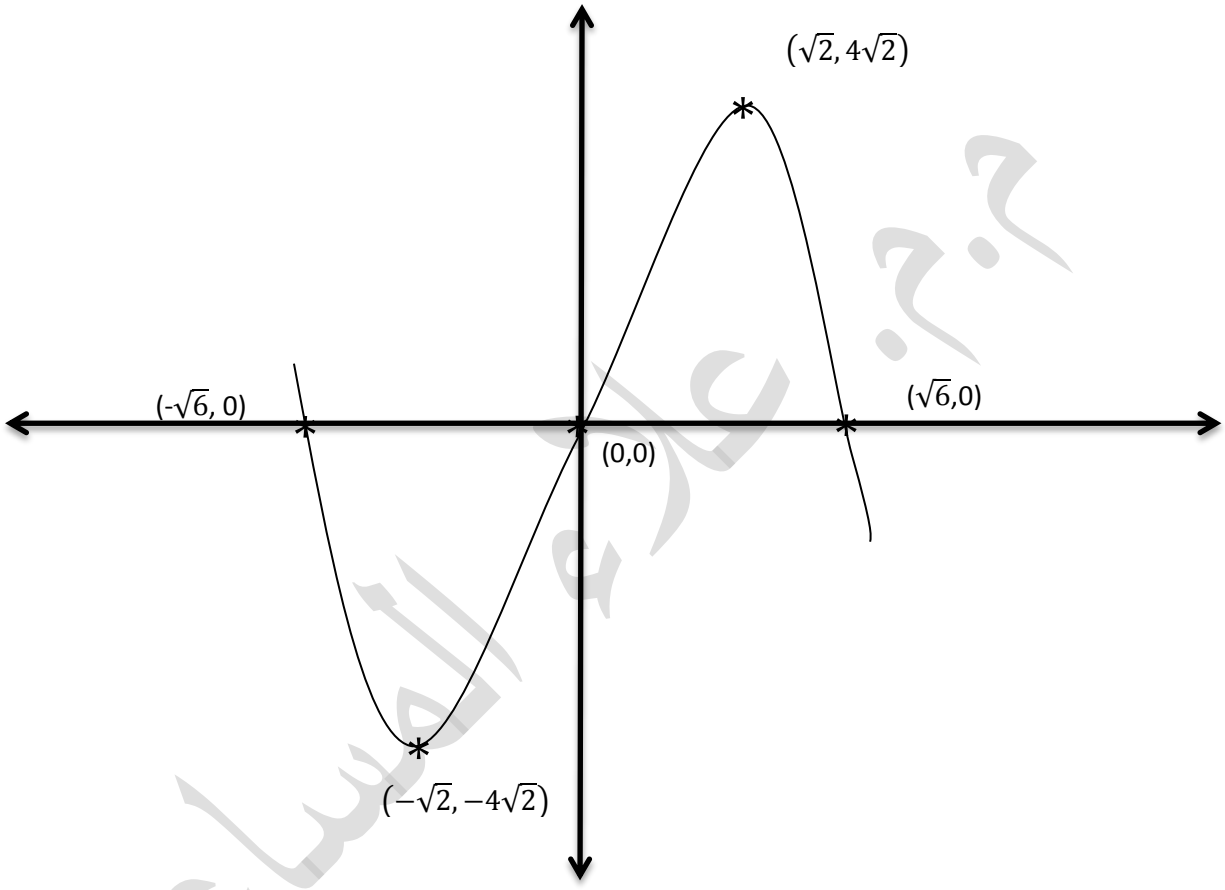
f(1)= $-6(1) = -6$

الدالة محدبة عند $(x > 0)$

الدالة مقعرة عند $(x < 0)$

النقطة $(0,0)$ نقطة انقلاب

الرسم:



سؤال: ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة $f(x) = (x+2)(x-1)^2$

الجواب:

اولا: اوسع مجال للدالة هو R

ثانيا: التناظر : لا يوجد تناظر لان $f(-x) \neq -f(x)$ و $f(-x) \neq f(x)$

ثالثا: التقاطع مع المحورين :

a) مع محور الصادات $(x = 0)$

$$f(0) = (0+2)(0-1)^2 = (2)(-1)^2 = 2 \Rightarrow (0,2)$$

b) مع محور السينات $(y = 0)$

$$0 = (x+2)(x-1)^2$$

اما $x = -2 \Rightarrow (-2,0)$

او $(x-1)^2 = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0)$

رابعا: المحاذيات :لا يوجد محاذيات لانها ليست نسبية

خامسا: نجد النهايات المحلية ونقط الانقلاب (نجد $f'(x), f''(x)$)

$$f(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$0 = 3x^2 - 3$$

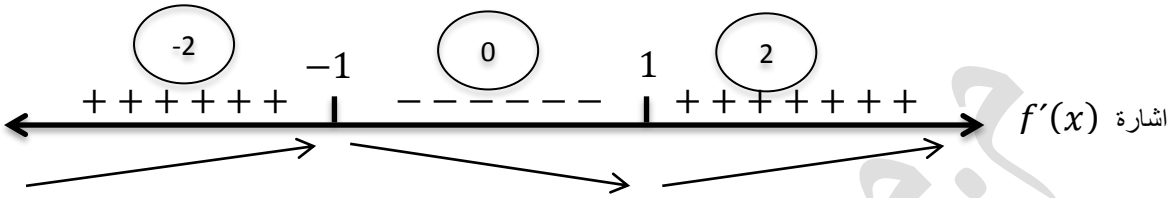
$$3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$$

$$f(1) = (1+2)(1-1)^2 = (3)(0)^2 = 0$$

نقطة حرجة $(1,0)$

$$f(-1) = (-1+2)(-1-1)^2 = (1)(-2)^2 = 4$$

نقطة حرجة $(-1,4)$



الدالة متزايدة عند $(x < -1)$ و $(x > 1)$

الدالة متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

∴ $(1,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

∴ $(-1,4)$ نقطة نهاية عظمى محلية

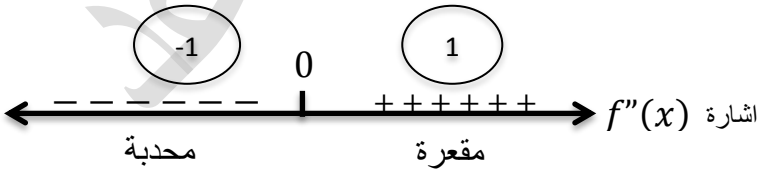
f(-2)= $3(-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$

f(0)= $3(0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$

F(2)= $3(2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$

$$f''(x) = 6x$$

$$0 = 6x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,2)$$



الدالة مقعرة عند $(x > 0)$

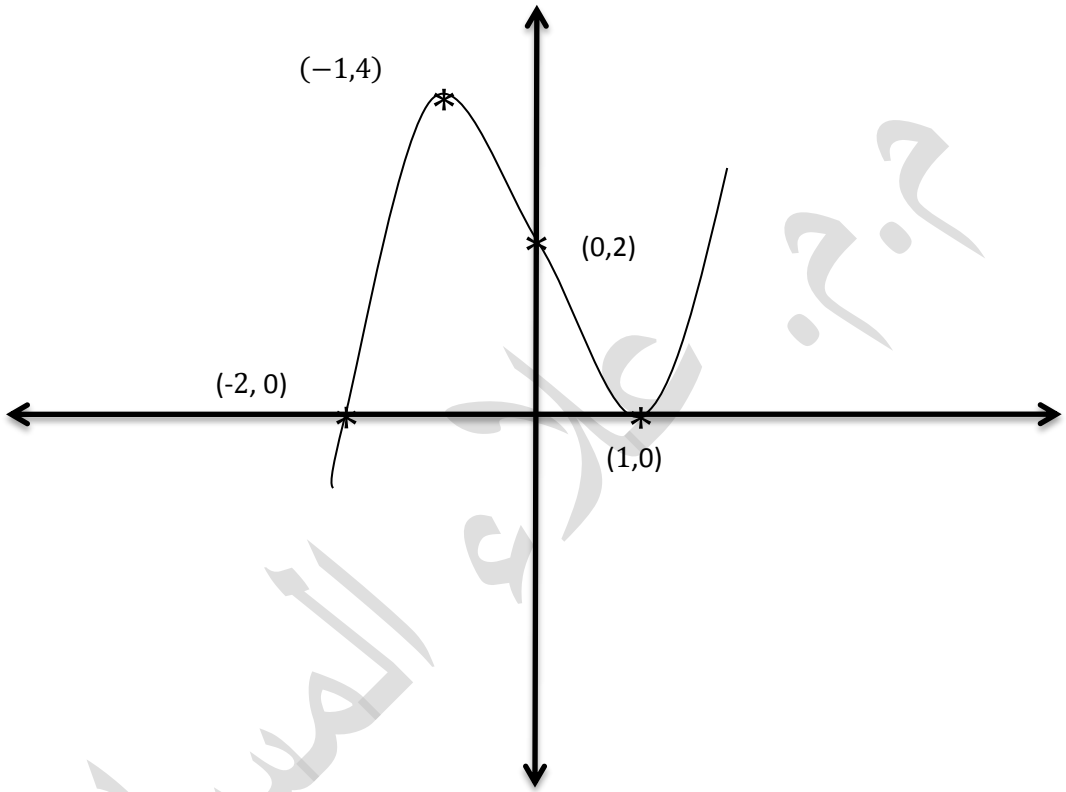
الدالة محدبة عند $(x < 0)$

النقطة $(0,2)$ نقطة انقلاب

f(-1)= $6(-1) = -6$

f(1)= $6(1) = 6$

الرسم:



م.م. علاء المساعد