الغايات (*Limits*)

- مقدمة:

تعدّ الغايات (*Limits*) من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل والتكامل، إذ تُستخدم لدراسة سلوك الدالة عندما يقترب المتغير من قيمة معيّنة دون أن يصل إليها بالضرورة. ومن خلال مفهوم الغاية يمكن فهم كيفية تصرّف الدوال عند نقاط معيّنة، سواء كانت هذه النقاط ضمن مجال الدالة أو عند أطرافه.

وتكمن أهمية الغايات في كونها الأساس الذي تُبنى عليه مفاهيم رياضية أخرى مثل الاستمرارية والمشتقات، كما أنها أداة ضرورية لتحليل التغير التدريجي والدقيق في القيم. ويساعد فهم الغايات على الانتقال من التفكير العددي البسيط إلى التفكير التحليلي العميق، مما يمهّد الطريق لدراسة التفاضل والتكامل وتطبيقاته في مختلف المجالات العلمية والهندسية.

- أهمية الغايات

اولا: أساس تعريف المشتقة

ثانيا: دراسة الاستمرارية

ثالثا: تحليل سلوك الدوال

رابعا: تطبيقات في الفيزياء والهندسة والاقتصاد

- مفهوم الغاية

يمكن تعريف غاية الدالة بأنها القيمة التي تقترب منها الدالة عندما يقترب المتغير من عدد معين.

نقول إن:

$$\lim_{(x \to a)} f(x) = L$$

أي أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من L عندما تقترب قيم x من a.

ملاحظة مهمة: ليس من الضروري أن تكون الدالة معرّفة عند $x = a$ حتى توجد الغاية.

- الغاية اليمنى والغاية اليسرى

الغاية اليمنى: عندما يقترب x من a من جهة اليمين

$$\lim_{(x \to a^+)} f(x)$$

الغاية اليسرى: عندما يقترب x من a من جهة اليسار

$$\lim_{(x \to a^-)} f(x)$$

توجد الغاية عند $x = a$ إذا وفقط إذا كانت الغاية اليمنى مساوية للغاية اليسرى.

- طرق إيجاد الغايات

اولا: الغاية العدد الثابت

$$\lim_{(x \to a)} C = C$$

مثال: جد ناتج $\lim_{(x \to 1)} 5$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 1)} 5 = 5$$

مثال: جد ناتج $\lim_{(x \to -1)} -7$

الجواب:

$$\lim_{(x \to -1)} -7 = -7$$

مثال: جد ناتج $\lim_{(x \to 2)} \sqrt{3}$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 2)} \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

ثانيا: الغاية لدالة كثيرة الحدود (التعويض المباشر)

$$\lim_{(x \to a)} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{(x \to a)} f(x) \pm \lim_{(x \to a)} g(x)$$

مثال: جد غاية الدالة $f(x) = (x^2 + 1)$ عندما $x = 2$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = \lim_{(x \to 2)} (x^2 + 1) = (2)^2 + 1$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = 5$$

مثال: جد غاية الدالة $f(x) = x^5$ عندما $x = 1$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = \lim_{(x \to 1)} x^5 = (1)^5$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = 1$$

ثالثا: الغاية لحاصل ضرب دالتين

مثال: جد غاية الدالة $(x + 2)(x^2 + 4)$ عندما $x = 1$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = \lim_{(x \to 1)} (x + 2)(x^2 + 4)$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = \lim_{(x \to 1)} (x^3 + 4x + 2x^2 + 8)$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = (1)^3 + 4(1) + 2(1)^2 + 8$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = 1 + 4 + 2 + 8 = 15$$

م.م. علاء المساعد

رابعا: الغاية لحاصل قسمة دالتين

$$\lim_{(x \to a)} [f(x) \ / \ g(x)] = \lim_{(x \to a)} f(x) \ / \ \lim_{(x \to a)} g(x)$$

مثال: جد غاية الدالة $(x^2 + 4) / (x + 1)$ عندما $x = 2$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = \lim_{(x \to 2)} (x + 2) / \lim_{(x \to 2)} (x^2 + 4)$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = (2 + 2) \ / \ ((2)^2 + 4)$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = (4) \ / \ (8)$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = 1/2$$

مثال: جد غاية الدالة $(3) / (x^2 + 2)$ عندما $x = 1$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = \lim_{(x \to 1)} (3) / \lim_{(x \to 1)} (x^2 + 2)$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = (3) \ / \ ((1)^2 + 2)$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = (3) \ / \ (3)$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = 1$$

مثال: جد غاية الدالة $(2) / (x^3 - 2)$ عندما $x = 0$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 0)} f(x) = \lim_{(x \to 0)} (2) \ / \ \lim_{(x \to 0)} (x^3 - 2)$$

$$\lim_{(x \to 0)} f(x) = (2) \ / \ ((0)^3 - 2)$$

$$\lim_{(x \to 0)} f(x) = (2) \ / \ (-2)$$

$$\lim_{(x \to 0)} f(x) = -1$$

نستخدم طريقة التحليل في حاصل قسمة دالتين عندما يكون المقام صفر بعد التعوض:

مثال: جد غاية الدالة $(x^2 - 4) / (x - 2)$ عندما $x = 2$

الجواب:

نحلل البسط:

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = \lim_{(x \to 2)} [(x^2 - 4) / (x - 2)]$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = \lim_{(x \to 2)} [(x - 2)(x + 2) / (x - 2)]$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = \lim_{(x \to 2)} (x + 2)$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = 2 + 2$$

$$\lim_{(x \to 2)} = 4$$

مثال: جد غاية الدالة $(x^3 - 8) / (x - 2)$ عندما $x = 2$

الجواب:

نحلل البسط:

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = \lim_{(x \to 2)} (x^3 - 8) / (x - 2)$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = \lim_{(x \to 2)} (x - 2)(x^2 + 2X + 4) / (x - 2)$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = \lim_{(x \to 2)} (x^2 + 2X + 4)$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = (2)^2 + 2(2) + 4$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = 4 + 4 + 4$$

$$\lim_{(x \to 2)} f(x) = 12$$

خامسا: غاية الجذر

$$\lim_{(x \to a)} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{(x \to a)} f(x)}$$

مثال: جد غاية الدالة $f(x) = \sqrt{(x^2 + 1)}$ عندما $x = 1$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = \lim_{(x \to 1)} \sqrt{(x^2 + 3)}$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = \sqrt{\lim_{x \to 1} (x^2 + 3)}$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = \sqrt{(1^2 + 3)}$$

$$\lim_{(x \to 1)} f(x) = 2$$

مثال: جد غاية الدالة $f(x) = \sqrt{x^5}$ عندما $x = 0$

الجواب:

$$\lim_{(x \to 0)} f(x) = \lim_{(x \to 0)} \sqrt{x^5}$$

$$\lim_{(x \to 0)} f(x) = \sqrt{\lim_{x \to 0} x^5}$$

$$\lim_{(x \to 0)} f(x) = \sqrt{(0)^5}$$

$$\lim_{(x \to 0)} f(x) = 0$$

م.م. علاء المساعد