- مشتقات الدوال المركبة:

تعد مشتقات الدوال المركبة من الموضوعات الأساسية في علم التفاضل، حيث تُستخدم لدراسة معدل تغيّر دالة مكوّنة من دالتين أو أكثر. وتظهر الدوال المركبة عندما تكون إحدى الدوال داخلة في أخرى، مثل $y = f(g(x))$.

مثال : اذا كانت : $f(x) = x - 1$ و $g(x) = x^2 + x$

جد: $(f \circ g)(x)$, $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(g \circ f)(x)$

الجواب:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

$$(f \circ g)(x) = f[x^2 + x]$$
$$(f \circ g)(x) = (x^2 + x) - 1$$
$$(f \circ g)(x) = x^2 + x - 1$$

$$(f \circ g)(x) = 2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

$$(g \circ f)(x) = g[x - 1]$$
$$(g \circ f)(x) = (x-1)^2 + (x-1)$$
$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 1 + x - 1$$
$$(g \circ f)(x) = x^2 - x$$

$$(g \circ f)(x) = 2x - 1$$

م.م. علاء المساعد

مثال : اذا كانت : $f(x) = 2x^2 - 5$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ حيث $x \neq 3$

جد: $(f \circ g)(x)$, $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(g \circ f)(x)$

الجواب:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

$(f \circ g)(x) = f[\frac{1}{x-3}]$

$(f \circ g)(x) = 2(\frac{1}{x-3})^2 - 5$

$(f \circ g)(x) = 2(\frac{1}{x-3})^2 - 5$

$(f \circ g)(x) = 2(x-3)^{-2} - 5$

$(f \circ \overline{g})(x) = -4(x-3)^{-3}$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$(g \circ f)(x) = g[2x^2 - 5]$

$(g \circ f)(x) = g[2x-5]$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{2x^2-5-3}$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{2x^2-8}$

$(g \circ f)(x) = (2x^2 - 8)^{-1}$

$(g \circ \overline{f})(x) = -1(2x^2 - 8)^{-2}(4x)$

$(g \circ \overline{f})(x) = -4x(2x^2 - 8)^{-2}$

م.م. علاء المساعد

مثال : اذا كانت : $f(x) = x^2$ و $g(x) = 3x + 1$

جد ميل المماس ومعادلته للدالة $(f \circ g)(x)$ عند النقطة $(1,4)$

الجواب:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

$(f \circ g)(x) = f[3x + 1]$

$(f \circ g)(x) = (3x + 1)^2$

$(f \circ \overline{g})(x) = 2(3x + 1)(3)$

$(f \circ \overline{g})(x) = 6(3x + 1)$

$(f \circ \overline{g})(x) = 18x + 6 = m$ **الميل عند اي نقطة**

$m = 6(3(1) + 1)$

$m = 6(4) = 24$ **الميل عند اي نقطة** $(1,4)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = 24(x - 1)$

$y - 4 = 24x - 24$

$y - 24x - 20 = 0$

• قاعدة السلسلة (*Chain Rule*)

مقدمة :

تعد قاعدة السلسلة من أهم القواعد في علم التفاضل، إذ تُستخدم لإيجاد مشتقة الدوال المركبة، وهي الدوال التي تتكوّن من دالتين أو أكثر تكون إحداها داخلة في الأخرى. وتظهر الحاجة إلى قاعدة السلسلة عند دراسة الدوال التي لا يمكن اشتقاقها مباشرة باستخدام قواعد التفاضل البسيطة، مثل الدوال الجبرية المركبة أو الجذرية أو الأسية ذات التراكيب المتداخلة.

وتكمن أهمية قاعدة السلسلة في قدرتها على تبسيط عملية الاشتقاق من خلال تحليل الدالة المركبة إلى جزأين: دالة خارجية ودالة داخلية. وباتباع هذه القاعدة، يتم اشتقاق الدالة الخارجية أولًا، ثم تُضرب مشتقتها بمشتقة الدالة الداخلية، مما يسمح بحساب معدل التغيّر بدقة وسهولة. كما تساعد قاعدة السلسلة على فهم العلاقة بين المتغيرات عندما يعتمد أحدها على الآخر بشكل غير مباشر.

وتستخدم قاعدة السلسلة في العديد من التطبيقات العلمية والعملية، مثل دراسة الحركة في الفيزياء، حيث ترتبط السرعة بمشتقة الإزاحة، وكذلك في الهندسة لتحليل التغيّرات في الأشكال الهندسية، وفي الاقتصاد لدراسة معدلات النمو والتغير. لذلك تُعد قاعدة السلسلة أداة أساسية لفهم سلوك الدوال المركبة وتطبيقاتها المختلفة في العلوم المتنوعة.

قاعدة الضرب:

اذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فان $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

قاعدة القسمة:

اذا كان $y = f(u)$ و $x = g(u)$ *فان* $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$$

مثال: اذا كانت : $y = 3u^2 - u$ ، $u = x^2 + 2$, جد $\frac{dy}{dx}$

الجواب:

$\frac{dy}{du} = 6u - 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{du}} \times \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}$$

$\frac{dy}{dx} = (6u - 1) \times (2x)$

$\frac{dy}{dx} = 12\,u \times - 2x$

نعوض معادلة ال u

$\frac{dy}{dx} = 12\,(x^2 + 2)\,x - 2x$

$\frac{dy}{dx} = 12\,x^3 + 24\,x - 2x$

$\frac{dy}{dx} = 12\,x^3 + 22\,x$

م.م. علاء المساعد

مثال: اذا كانت : $y = 2u^2 - u$ ، $x = u^3$, جد $\frac{dy}{dx}$

الجواب:

$\frac{dy}{du} = 2u - 1$

$\frac{dx}{du} = 3u^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2u-1}{3u^2}$$

واجب: اذا كانت : $y = u^6 - 2u$ ، $x = 4u - 3$, جد $\frac{dy}{dx}$

واجب: اذا كانت : $y = 2x - 1$ ، $u = x^3$, جد $\frac{dy}{du}$

م.م. علاء المساعد

مثال: اذا كانت : $x = 4z - 2$ ، $y = x^2 - 3x$, اثبت ان

$$\frac{dy}{dz} + 7\frac{dx}{dz} = 32\,z$$

الجواب:

$$\frac{dx}{dz} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dx}{dz} \times \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dz} = (4)(2x - 3)$$

$$\frac{dy}{dz} = 8x - 12$$

$$\frac{dy}{dz} = 8(4z - 2) - 12$$

$$\frac{dy}{dz} = 32z - 16 - 12$$

$$\frac{dy}{dz} = 32z - 28$$

الطرف الايسر $= \frac{dy}{dz} + 7\ \frac{dx}{dz}$

الطرف الايسر $= 7(32\,z - 28) + 7(4)$

الطرف الايسر $= (32\,z - 28) + 7(4)$

الطرف الايسر $= 32\,z - 28 + 28$

الطرف الايسر $= 32\,z$

اذن الطرف الايمن = الطرف الايسر

م.م. علاء المساعد