كلية التربية الأساسية

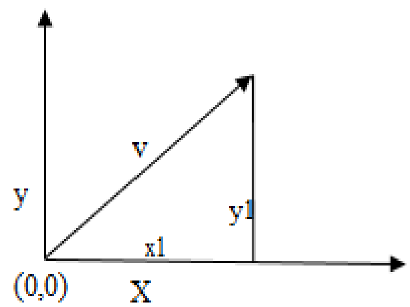
قسم الرياضيات

المرحلة الثانية

الجبر الخطي

(المحاضرة الثانية)

طول المتجه في R^2, R^3 : ليكن المتجه $v= (x_1, y_1)$ في الفضاء الثنائي R^2 كما موضح في الشكل التالي:



عندئذ طول المتجه v يرمز له بالرمز $\|v\|$ ويعرف كالتالي $\|v\| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$

اما اذا كان المتجه في الفضاء الثلاثي R^3 فأن $\|v\| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$

مثال: جد طول المتجه $v= (-3, 2, 1)$

الحل:

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

ملاحظة: لحساب المسافة بين نقطتين يتم استخدام القانون التالي

$$d= \|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad R^2$$

$$d= \|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad R^3$$

مثال: جد المسافة بين النقطتين $p_1(3,2), p_2=(-1, 5)$

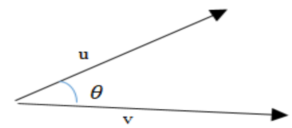
الحل:

$$d= \|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5\ unit$$

ضرب المتجهات:

الضرب النقطي dot product:

تعريف: اذا كان u,v متجهين في الفضاء الثنائي او الثلاثي و كانت θهي الزاوية المحصورة بينهما فأن الضرب العددي (النقطي) يعرف كالتالي:



$$u.v = \|u\|.\|v\|\,cos\theta$$

مثال: اذا كان u=(0, 0, 1), v= (0, 2, 2) و الزاوية θ المحصورة بينهما تساوي 45° جد u.v

الحل:

$$u.v = \|u\|.\|v\|\,cos\theta$$

$$\|u\| = \sqrt{0+0+1} = 1$$

$$\|v\| = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

u.v= 1. $2\sqrt{2}$. Cos 45

= 1. $2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$

* يمكن إيجاد الضرب النقطي لمتجهان بطريقة أخرى باستخدام مركبات المتجهين فاذا كان $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $v = (v_1, v_2, v_3)$ فأن $u.v = (u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3)$

مثال: ليكن u= (2, -1, 1) و v= (1,1,2) جد u.v و الزاوية بين u و v

الحل:

u.v= (2.1)+(-1.1)+(1.2) = 2-1+2 = 3

$$\|v\| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\|u\| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$u.v = \|u\|.\|v\| \cos\theta$

$3 = \sqrt{6}.\sqrt{6}\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore \theta = 60°$

نظرية: ليكن u,v متجهين غير صفريين في R^3 او R^2 ولتكن θ هي الزاوية المحصورة بينهما عندئذ

1- $\|v\| = (v.v)^{\frac{1}{2}}$

2- $u.v = 0 \leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

البرهان :

1- لما كانت الزاوية θ بين u,v تساوي صفرا فأن $v.v = \|v\|.\|v\| \cos\theta = \|v\|^2.1$ وعلية نجد ان $\|v\| = (v.v)^{\frac{1}{2}}$

2- اذا كان $u \neq 0, v \neq 0$ بالفرض فأن $\cos\theta = 0 \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ نستنتج منه انت u عمودي على v و بالعكس اذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فأن $\cos\theta = 0$ وبالتالي فأن $u.v = \|u\|.\|v\|.0 = 0$

الضرب الاتجاهي vector product (cross product):

تعريف: اذا كان $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ متجهين في الفضاء الثلاثي فأن الضرب الاتجاهي لهما يرمز له بالرمز $u \times v$ و بعرف كالتالي: $(u \times v) = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3, u_3v_1 - u_1v_3)$

او بطريقة المحددات:

$$uxv = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$$

وهناك طريقة سهلة لحساب uxv باستخدام المصفوفات اذ تكون مصفوفه من السعة 2x3 بواسطة مركبات المتجهين u,v

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

بحيث يكون الصف الأول من مركبات المتجه u و الصفق الثاني من مركبات المتجه v.

فنحصل على المركبة الأولى للضرب الاتجاهي uxv بحذف العامود الأول من المصفوفة ثم نأخذ المحدد للباقي و كذلك سالب محدد المركبة الثانية بحذف العمود الثاني من المصفوفة و محدد المركبة الثالثة بحذف العمود الثالث من المصفوفة.

مثال: جد uxv اذا كان u= (1, 2, -2), v= (3, 0, 1)

الحل: نكون المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$uxv = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (2, -7, -6)$$

نلحظ ان الضرب الداخلي يعطي عدداً حقيقياً اما الضرب الاتجاهي فأنه يعطي متجهاً.

سنقدم النظرية التالية التي تعطي العلاقة بين الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي ونبين كذلك الضرب الاتجاهي للمتجهين u,v يكون عمودياً على كل من uوv.

نظرية: إذا كان u و v متجهين في R^3 فأن

1- $u.(uxv) = 0$ أي ان (uxv عمودي على u)

2- $v.(uxv) = 0$ أي ان (uxv عمودي على v)

البرهان:

1- ليكن $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $v = (v_1, v_2, v_3)$ متجهين في R^3 عندئذ

$$u.(uxv) = (u_1, u_2, u_3).\ (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3, u_3v_1 - u_1v_3)$$

$$= u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3u_2v_1) = 0$$

2- واجب.

مثال: اذا كان u=(1,3, -2) وv=(3, 0, 4) متجهين في R^3 فأحسب $u.(uxv)$ و $v.(uxv)$

الحل: نكون المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$uxv = \left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right)$$

=(12, -10, -9)

$$u.(uxv) = (1,3,-2).(12,-10,-9) = 12 - 30 + 18 = 0$$

$$v.(uxv) = (3,0,4).(12,-10,-9) = 36 + 0 - 36 = 0$$

<u>متجهات الوحدة:</u>

متجه الوحدة هو ذلك المتجه الذي طوله يساوي واحد. ليكن $v \neq 0$ متجهاً في R^2 او R^3 فان المتجه $u = \frac{v}{\|v\|}$ هو متجه الوحدة باتجاه v

ليكن v= (-3,4) متجه غير صفري في R^2

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$$

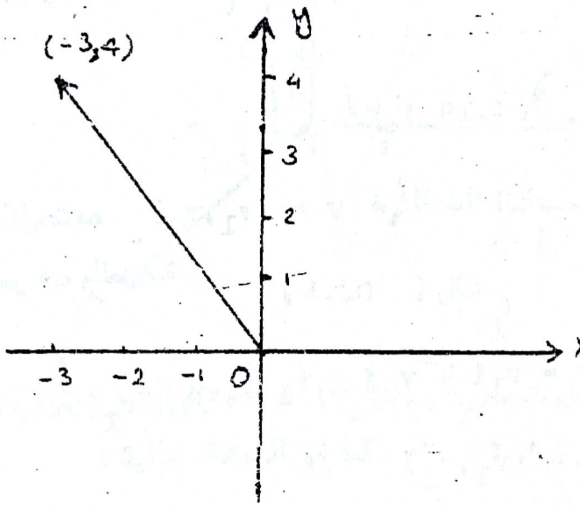
متجه الوحدة باتجاه v هو

$$u = \frac{(-3,4)}{5} = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$$

وطول u يساوي واحد لى ان

$$\|u\| = \sqrt{(-\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = 1$$

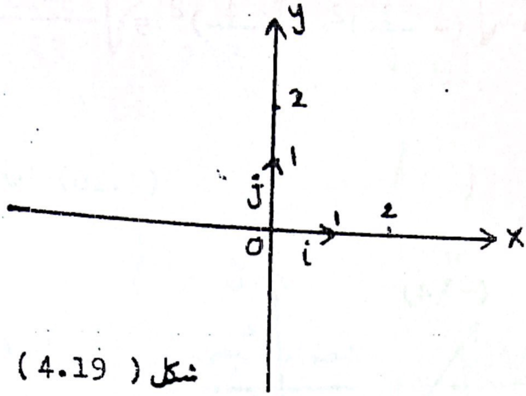
كما في الشكل (4.18)



شكل (4.18)

في R^2 هناك متجها وحده مهمان هما $i=(1,0)$ بالاتجاه الموجب لمحور x والثاني $j=(0,1)$ بالاتجاه الموجب لمحور y كما في الشكل

هذان المتجهان يكونان متعامدان



شكل (4.19)

يلاحظ ان كل متجه (v_1,v_2) = v في الفضاء الثاني R^2 يمكن التعبير عنه بالصيغة

$$v = v_1 i + v_2 j = v_1(1,0) + v_2(0,1)$$

$$= (v_1, v_2)$$

المثال 10:

اذا كان $v = (4, -5)$ فأن

$$v = 4(1,0)+(-5)(0,1) = 4i - 5j$$

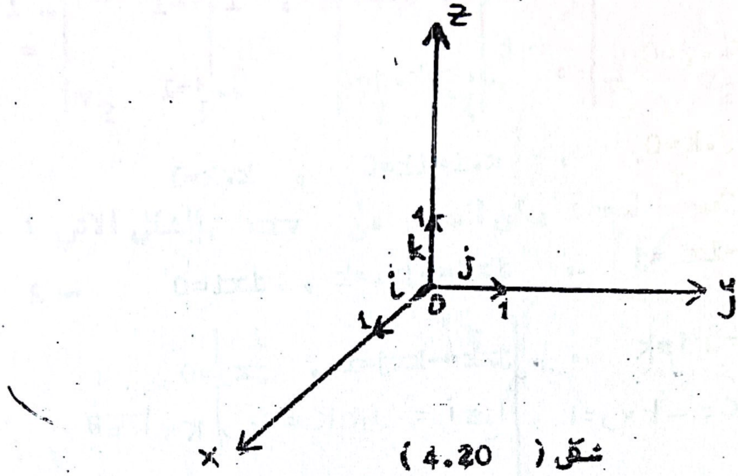
كذلك بالنسبة للفضاء الثلاثي R^3 هناك ثلاثة متجهات وحدة هما :

الاتجاه الموجب لمحور x $\quad i = (1,0,0)$

الاتجاه الموجب لمحور y $\quad j = (0,1,0)$

الاتجاه الموجب لمحور z $\quad k = (0,0,1)$

وتكون هذه المتجهات متعامدة مع بعضها البعض وطول كــل منها يساوي واحداً كما في الشكل(4.20)



شكل (4.20)

ويلاحظ ان كل متجه $v = (v_1, v_2, v_3)$ في R^3 يمكن التعبيــر عن بدلالة i ، j ، k كما في الصيغة التالية :

$$v = v_1(1,0,0)+v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1)$$

$$= v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

مثلا $v = (2,1,-3)$ نستطيع كتابـــته بدلالة i ، j ، k

$$v = 2i + j-3k.$$

Scanned with CamScanner

ومن تعريف الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي يمكن ا

الخواص التالية لمتجهات الوحدة i ، j ، k .

1 – $i \cdot i=1$, $i \cdot j=j \cdot i=0$, $i \cdot k=ki=0$

$j \cdot j=1$, $j \cdot k=k \cdot j=0$, $j \cdot i=i \cdot j=0$

$k \cdot k=1$, $k \cdot i=ik=0$, $k \cdot j=j \cdot k=0$

2 – $i \times i=0$, $i \times j=-j \times i=k$, $k \times i=-i \times k=j$

$j \times j=0$, $j \times k=-k \times j=i$, $\cancel{i \times j=-j \times i=k}$

$j \times k=-k \times j=i$, $k \times i=-i \times k=j$, $k \times k=0$

وباستخدام متجهات الوحدة i ، j ، k يمكن تعريف الضرب الاتجاهي وكما يلي .

ليكن $u=(u_1,u_2,u_3)$ ، $v=(v_1,v_2,v_3)$

متجهين في الفضاء الثلاثي R^3 ،

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

كما ان

١٢١

$$u \times v = (u_1 i + u_2 j + u_3 k) \times (v_1 i + v_2 j + v_3 k)$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

ومن تعريف المحدد يمكن التعبير عن $u \times v$ بالشكل الاتي :

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

المثال 11 : اذا كان $v = (3,0,1)$ ، $u = (1,2,-2)$

فاحسب $u \times v$.

الحل :

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 7j - 6k$$

اذا كان u,v متجهين في الفضاء الثلاثي E^3 فـــان الضرب الاتجاهي $u \times v$ يفيدنا في حساب مساحة متوازي الاضلاع المحدد بوساطة المتجهين u,v وذلك من خلال ايجـــاد سيجد تماماً مساحة ~~[illegible]~~ الطول الى $u \times v$ اذا ان $\|u \times v\|$ متوازي الاضلاع . اذا كانت θ الزاوية المحصورة بين u و v ~~ينتج من مبرهنة 4-4 فرع (جـ)~~ ان

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$$ ——— من نظرية لاكرانج

بما أن

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos \theta$$

لذا يكـــون

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta$$

$$= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta$$

وباخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على

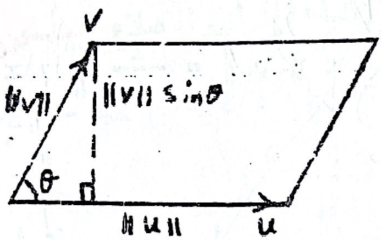
$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$$

ويكون $\|u\|$ قاعدة متوازي الاضلاع و $\|v\| \sin \theta$ ارتفاعه كما في الشكل ادناه .

تستخدم بعض التطبيقات لايجاد مساحة المثلث ومتوازي الاضلاع باستخدام الضرب الاتجاهي كما في :-

ايجاد مساحة المثلث : لم يدرس من الاستاذة

نجد ان $\|v\| \sin\theta$ يساوي ارتفاع متوازي الاضلاع المحدد بالمتجهين u ، v كما في الشكل (4.21)



شكل (4.21)

فيكون

$$\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \sin\theta$$

كما أن

$$A = \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \text{ القاعدة } \times \text{ الارتفاع}$$

لذا فيكون

$$A = \frac{1}{2} \|u \times v\| = \frac{\|u\| \, \|v\| \sin\theta}{2}$$

المثال 12 :

لايجاد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي :

$P_3=(3,4,3)$ $P_2=(-1,0,5)$, $P_1=(2,2,4)$

١٢٢

نكتب

$$u = \overrightarrow{P_1P_2} = (-1-2, 0-2, 5-4) = (-3, -2, 1)$$

$$v = \overrightarrow{P_1P_3} = (3-2, 4-2, 3-4) = (1, 2, -1)$$

$$A_T = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \right\| = \frac{1}{2} \left\| u \times v \right\|$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2j - 4k$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 \div (4)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{20}$$

$$= \sqrt{5}$$

مساحة متوازي الاضلاع :

مساحة متوازي الاضلاع = طول القاعدة x الارتفاع = A_P

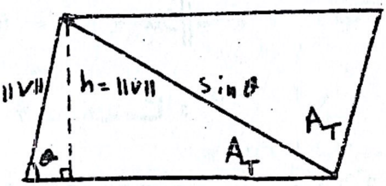
اي ان

$$A_P = \| p_1p_2 \times p_1p_3 \| = \| u \times v \|$$

في المثال السابق ان مساحة متوازي الاضلاع تكــون

$$A_p = \| -2j - 4k \| = 2\sqrt{5}$$

كما في الشكل (4.22)



شكل (4.22)

يمكن ان نحسب مساحة متوازي الاضلاع بجمع مساحة المثلث مرتيـــن اذ ان

$$A_p = A_T + A_T = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$