كلية التربية الأساسية
قسم الرياضيات
المرحلة الثانية

COLLEGE OF BASIC EDUCATION

الجبر الخطي

(المحاضرة الثامنة)

<u>القيم الذاتية والمتجهات الذاتية:</u>

تعريف: إذا كانت A مصفوفة من السعة nxn. عندئذ يطلق على متجه غير صفري $\overrightarrow{x}$ في R^n اسم متجه ذاتي للمصفوفة A اذا كان Ax مضاعف عددي للمتجه $\overrightarrow{x}$ أي ان:

$$Ax = \lambda x$$

يطلق على العدد λ قيمة ذاتية للمصفوفة A ويطلق على $\overrightarrow{x}$ متجه ذاتي مرافق λ.

مثال 1: المتجه $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ هو متجه ذاتي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ يرافق القيمة الذاتية 4= λ لان

$$A\,\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\overrightarrow{x}$$

اذا كانت λ قيمة ذاتية لمصفوفة A ترافق المتجه $\overrightarrow{x}$ عندئذ $Ax = \lambda x$ لذلك فأن الضرب ب A يمدد $\overrightarrow{x}$

او يقلص $\overrightarrow{x}$ او يعكس اتجاهه معتمداً على قيم λ.

لإيجاد القيم الذاتية لمصفوفة A nxn تكتب $\boldsymbol{A\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x}}$

التي تكافئ

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$$

(I المصفوفة المحايدة (مصفوفة الوحدة)) ولما كان $\boldsymbol{0} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ فأن

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0}$$

يطلق على هذه المعادلة اسم المعادلة المميزة للمصفوفة A ويطلق على الاعداد التي تحقق هذه المعادلة (قيم λ) اسم القيم الذاتية للمصفوفة A.

مثال 2: جد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - (-3.-2)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2 - 6$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 4$$

$$\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

$\therefore$ القيم الذاتية للمصفوفة هي $\lambda = -1, \lambda = 4$

مثال 3: جد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda(\lambda - 5) - (-4) + 2(-1(\lambda - 5) - 4) + (-4 + 4\lambda)$$

$$= (\lambda - 1)\left((\lambda^2 - 5\lambda) + 4\right) + (-2\lambda + 10) - 8 + (-4 + 4\lambda)$$

$$= \lambda^3 - 5\lambda^2 - \lambda^2 + 5\lambda + 4\lambda - 4 - 2\lambda + 10 - 8 - 4 + 4\lambda$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

ولإيجاد قيم λ نقوم بحل المعادلة بالطريقة التالية

$$1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

بما ان مجموع معامل λ والحد المطلق بالمعادلة (1) تساوي صفر اذن العدد واحد أحد حلول المعادلة والمعادلة تحل بالطريقة الاتية

$$(\lambda - 1)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0 \quad \dots\dots (*)$$

$$= a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda - a\lambda^2 - b\lambda - c$$

$$= a\lambda^3 + (-a + b)\lambda^2 + (c - b)\lambda - c \dots\dots . (2)$$

وبمساواة المعادلة (1) بالمعادلة (2) ينتج

$$a = 1$$

$$-a + b = 6 \Longrightarrow b = -5$$

$$c - b = 11 \Longrightarrow c = 6$$

و بتعويض قيم a, b, c في المعادلة *

$$(ʎ-1)(ʎ^2-5ʎ+6)=0$$

$$(ʎ-1)(ʎ-2)(ʎ-3)=0$$

$$(ʎ-1)=0 \Longrightarrow ʎ=1$$

$$(ʎ-2)=0 \Longrightarrow ʎ=2$$

$$(ʎ-3)=0 \Longrightarrow ʎ=3$$

∴ القيم الذاتية للمصفوفة A هي $ʎ=1, ʎ=2, ʎ=3$

مثال 4: جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المرافقة للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

الحل: لإيجاد القيم الذاتية للمصفوفة

$$ʎI-A = ʎ\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ʎ-3 & 2 & 0 \\ 2 & ʎ-3 & 0 \\ 0 & 0 & ʎ-5 \end{bmatrix}$$

$$|ʎI-A| = (ʎ-3)\big((ʎ-3)(ʎ-5)\big) - 2\big(2(ʎ-5)\big)$$

$$= (ʎ-3)^2.(ʎ-5)-4ʎ+20$$

$$= ʎ^3-11ʎ^2+35ʎ-25=0 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

وبحل هذه المعادلة

$$(ʎ-1)(aʎ^2+bʎ+c)=0 \quad \dots\dots(*)$$

$$= aʎ^3+bʎ^2+cʎ-aʎ^2-bʎ-c$$

$$= a\lambda^3 + (-a+b)\lambda^2 + (c-b)\lambda - c \ldots\ldots.(2)$$

$$a = 1$$

$$-a + b = -11 \Longrightarrow b = -10$$

$$c - b = 35 \Longrightarrow c = 25$$

و بتعويض قيم a, b, c في المعادلة *

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 10\lambda + 25) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - 5) = 0$$

$$(\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

$$(\lambda - 5) = 0 \Longrightarrow \lambda = 5$$

لإيجاد المتجهات بموجب التعريف

$$(\lambda I - A)\overrightarrow{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots(1)$$

عندما $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$-4x_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = 0$$

ولتكن $x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 0$

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

عندما $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2x_1 + 2x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = -x_2$

$2x_1 + 2x_2 = 0$

$x_1 = -s, x_2 = s, x_3 = t$ **ولتكن**

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$