كلية التربية الأساسية

قسم الرياضيات

المرحلة الثانية

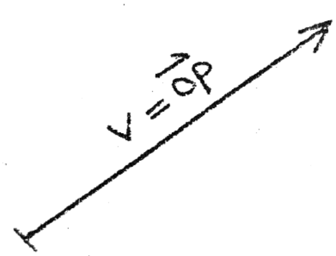
الجبر الخطي

(المحاضرة الأولى)

المتجهات vectors

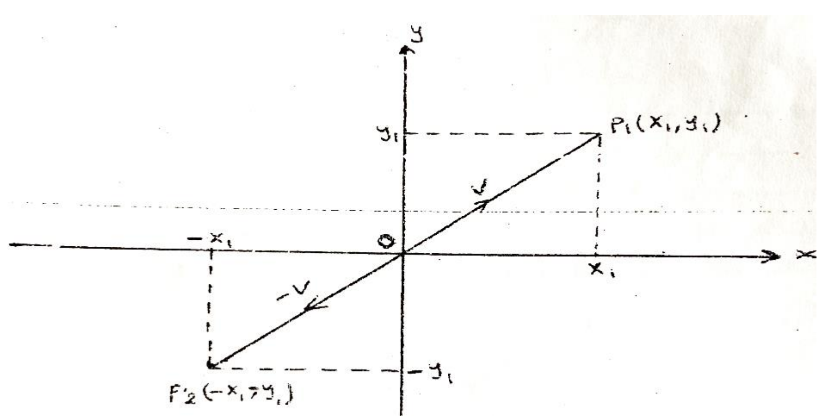
المتجهات و المقادير العددية:

توصف الكثير من الكميات بخاصة في الفيزياء بدون اتجاه كما ان كميات أخرى يتطلب الامر تعيين اتجاه لها. اذا تسمى الكميات التي لها مقدار عددي وليس لها اتجاه بالكميات العددية وتكون غير اتجاهية مثل الطول الزمن و المساحة. اما الكميات التي لها مقدار عددي واتجاه فتسمى بالمتجهات مثل القوة والسرعة والتعجيل اذا ان لكل منها اتجاه وسنرمز لها بالحروف .... ,u, w, v يمثل المتجه عادة بسهم مثل $v = \overrightarrow{op}$ يحدد الطول و الاتجاه للمتجه v اذ ان النقطة O تمثل البداية له والنقطة p تمثل نهايته و يكون اتجاهه من o الى p و كما في الشكل التالي:



التمثيل الهندسي للمتجهات في R^2 و R^3:

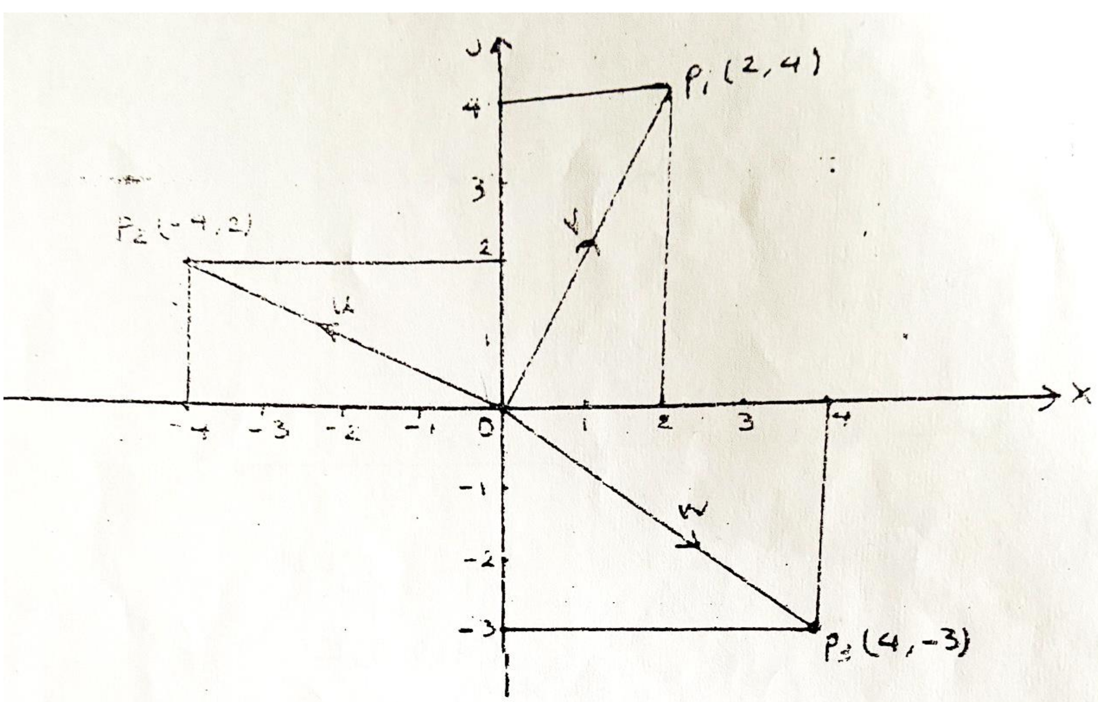
يمكن تمثيل أي متجه هندسيا كقطعة مستقيم ذات اتجاه في المستوى xy كما في الشكل التالي:



اذ ان كل نقطة في المستوى xy هي عبارة عن زوج مرتب من الاعداد الحقيقية (x_1,y_1) وان x_1 يمثل قطعة المستقيم $\overrightarrow{ox_1}$ على المحور x الذي نقطة البداية له o ونهايته x_1 وهو مسقط النقطة $p_1(x_1, y_1)$ على المحور x. وكذلك y_1 تمثل قطعة المستقيم المتجه $\overrightarrow{oy_1}$ على محور y الذي نقطة البداية له o ونهايته y_1 وهو مسقط النقطة $p_1(x_1, y_1)$ على محور y وعليه يكون مسقط المتجه $y = \overrightarrow{op_1}$ وعلى محور x هو قطعة المستقيم المتجه $\overrightarrow{ox_1}$ ومسقطه على y هو قطعة المستقيم $\overrightarrow{oy_1}$ وهكذا يمكن تمثيل أي نقطة في المستوى xy كمتجه.

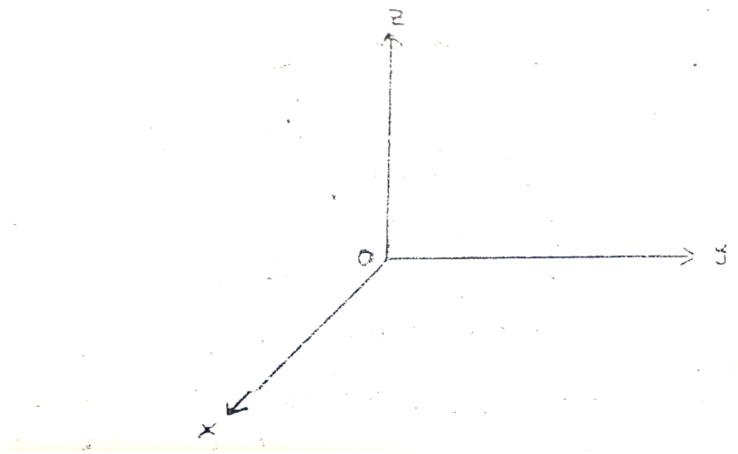
ويكون المتجه v الذي بدايته o و نهايته p_1 بالاتجاه الموجب اما سالب v هو v– يمكن تمثيلة بالأسلوب نفسه و تكون بدايته o و نهايته p_2 ولكن بالاتجاه السالب. سنرمز للمستوى xy بالرمز R^2 ويسمى الفضاء الثنائي في R^2 يقرن كل نقطة (زوج مرتب) بقطعة مستقيم متجه و بالعكس. أي انه لأي نقطة $p_1(x_1, y_1)$ يتحدد متجه وحيد v في الفضاء R^2 وتسمى احداثيات R^2 $v = \overrightarrow{op_1}(x_1, y_1)$ بمركبتي المتجه v و تكتب $v=(x_1,y_1)$.

مثال1:

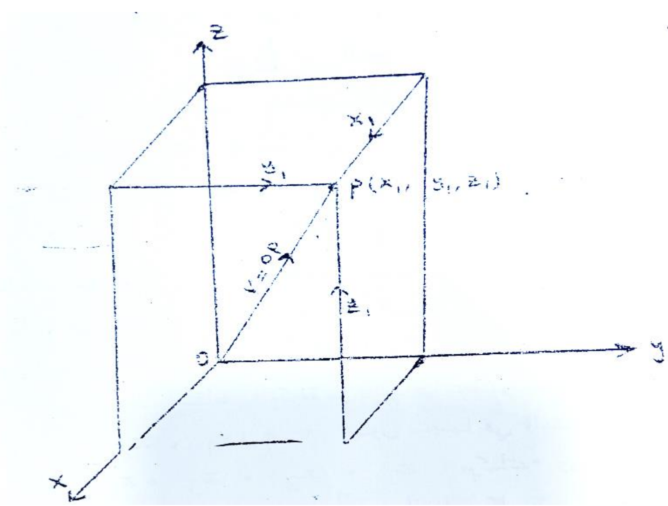


المتجه v هنا يمثل قطعة المستقيم المتجه $\overrightarrow{op_1} = (2,4)$ و u قطعة المستقيم المتجه $\overrightarrow{op_2} = (-4,2)$ و w قطعة المستقيم المتجه $\overrightarrow{op_3} = (4,-3)$.

وبالطريقة نفسها يمكن تمثيل أي متجه في xyz الذي يتكون من ثلاثة مستويات متعامدة مع بعضها البعض هي xy, yz, xz ويكون تقاطع هذه المستويات في نقطة الأصل (0,0,0) كما في الشكل التالي:



وتحدد لكل نقطة $p(x_1, y_1, z_1)$ في هذا الفضاء بقطعة المستقيم المتجه $v = \overrightarrow{op}$ بدايته نقطة الأصل (O) ونهايته النقطة p فتكون مساقط النقطة p على المحاور المتعامدة الثلاثة x, y, z هي $(x_1,0,0)$, $(0, y_1,0)$, $(0, 0, z_1)$ على الترتيب لذا فأن بعد النقطة p عن محور x هي x_1 في المستوى yz و على بعد y_1 في المستوى xz و على بعد z_1 في المستوى xy كما في الشكل التالي:



وبالأسلوب نفسه يمكن تمثيل سالب v ونرمز له بالرمز v– بقطعة مستقيم متجه $\overrightarrow{OQ}$ عندما تكون احداثيات النقطة Q هي $(-x_1, -y_1, -z_1)$ ويكون للمتجه v– نفس طول المتجه v ولكن بالاتجاه المعاكس سنرمز للفضاء xyz بالرمز R^3 ويسمى الفضاء الثلاثي. وتسمى احداثيات النقطة $v=\overrightarrow{op}(x_1, y_1, z_1)$ بمركبات المتجه v وتكتب $v=(x_1, y_1, z_1)$ ويكون التمثيل الهندسي للمتجهات في R^3 يقرن كل ثلاثي مرتب بقطعة مستقيم متجه في الفضاء (أي ان أي نقطة في R^3 يتحدد متجه v في الفضاء xyz) ويكتب $v=(x_1, y_1, z_1)$ حيث x_1, y_1, z_1 مركبات المتجه v.

- في بعض التطبيقات لا تكون نقطة البداية للمتجه عند نقطة الأصل فمثلا اذا كان المتجه $v = \overrightarrow{p_1p_2}$ نقطة البداية له هي $p_1=(x_1, y_1, z_1)$ و نهايته النقطة $p_2=(x_2, y_2, z_2)$ فأن $v = \overrightarrow{p_1p_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$ أي ان مركبات v ناتجه من طرح احداثيات نقطة البداية من احداثيات نقطة النهاية.

مثال: جد احداثيات المتجه $v = \overrightarrow{p_1p_2}$ في الفضاء الثلاثي الذي بدايته $p_1= (2,-1,4)$ و نهايته $p_2=(7,5,-8)$.

الحل :

$$v = \overrightarrow{p_1p_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

$$= (7 - 2, 5 - (-1), -8 - 4)$$

$$= (5, 6, -12)$$

<u>خواص المتجهات و العمليات الجبرية:</u>

تساوي المتجهات في R^2, R^3: اذا كانت بداية المتجهين v, w نقطة الأصل في الفضاء الثنائي او الثلاثي فأن $v=w$ اذا وفقط اذا تساوت مركباتهما المتناضرة أي اذا انطبقت نقطتي النهاية لهما. فأذا كان $v=(x_1, y_1), w=(x_2, y_2)$ فأن $v=w$ اذا وفقط اذا $x_1=x_2$, $y_1= y_2$ كذلك اذا كانت $v=(x_1,$

$(x_1, y_1, z_1), w=(x_2, y_2, z_2)$ متجهين في الفضاء الثلاثي فأن $v= w$ اذا وفقط اذا تساوت مركباتهما المتناظرة $x_1=x_2\ , y_1= y_2, z_2= z_1$

مثال: اذا كان $v= (2,-1)$ و $w= (2,4)$ فأن $v\neq w$ لعدم تساوي مركباتهما المتناظرة ولكن $v= (1,2,-3)$ و $w= (1,2,-3)$ فأن $v= w$ لتساوي مركباتهما المتناظرة.

جمع المتجهات في R^2, R^3 : ليكن كل من $v=(x_1, y_1)$ و $w=(x_2, y_2)$ متجهاً في R^2 عندئذ فأن مجموع المتجهين v, w يكتب $v+w$ ويعرف بما يأتي $v+w= (x_1+x_2, y_1+y_2)$

كذلك اذا كان $v=(x_1, y_1, z_1)$ و $w=(x_2, y_2, z_2)$ أي متجهين في الفضاء R^3 فأن $v+w$ يعرف بما يأتي: $v+w= (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

الضرب بعدد للمتجهات في R^2, R^3 : اذا كان $v=(x_1, y_1)$ متجهاً في R^2 وكان k عددا حقيقياً فأن الضرب $k.v$ يعرف كما يأتي :

$k.v= k(x_1, y_1)= (kx_1, ky_1)$ أي ان kv ناتج عن ضرب مركبات v بالعدد k

كذلك اذا كان $v=(x_1, y_1, z_1)$ متجها في R^3 فان $kv= k(x_1, y_1, z_1)= (kx_1, ky_1, kz_1)$

وعليه يمكن ان نعرف سالب v $(-v)$ بالشكل $(-1)\ v= -v$

بحيث يكون $v+ (-1)v= 0$

كذلك يعرف الفرق بين المتجهين v و w بالطريقة الاتية: $v+(-1)w = v-w$

المثال 5 :

اذا كان $v = (1,-2)$ ، $w = (7,6)$ متجهــــا

في R^2 جد $v + w$ ، $5v$ ، $v - w$:

الحــل :

$$v + w = (1,-2) + (7,6) = (1+7,-2+6)$$
$$= (8,4)$$

$$5v = 5(1,-2) = (5,-10)$$

$$v-w = (1,-2) - (7,6) = (1-7,(-2)-6)$$
$$= (-6,-8)$$

المثــال 6 :

اذا كان $v = (2,-1,3)$ ، $w = (1,5,4)$

متجهين في R^3 وكان $k_1 = 3$ ، $k_2 = -2$ جـــــد

$$k_1v + k_2w$$

الحل :

$$k_1v = 3(2,-1,3) = (6,-3,9)$$

$$k_2w = -2(1,5,4) = (-2,-10,-8)$$

لاحظنا عند دراستنا للمصفوفات في الفصل الثاني انه يمكن تعريف المتجه على انه مصفوفة مكونة من صف واحد او عمود واحد وبهذا يمكن ان تقترن كل مصفوفة في هذا النوع بقطعة مستقيم متجه وتكون مركباتها عبارة عن صف واحد او عمود واحد • لذا فان المصفوفة v من السعة $2x1$ تكتب بالشكل :

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

كمتجه عمود في R^2 وتكون x_1 و y_1 مركباته كذلك فان المصفوفة

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

من السعة $3x1$ كمتجه عمود في R^3 وتكون x_1 و y_1 و z_1 مركباته • ويمكن تعريف تساوي المتجهات بالشكل الاتي :

اذا كان $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ ، $w = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

متجهين في R^2 فأن $v = w$ اذا واذا فقط $x_1 = x_2$ ،

كذلك اذا كان $y_1 = y_2$

$$w = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$ متجهين R^3

فان $v = w$ اذا واذا فقط $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ ، $z_1 = z_2$.

أي اذا تساوت مركباتهما المتناظـرة .

المثال 7 :

ليكـن

$$w = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 - 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

متجهين في R^3 اذا كان $v = w$ فان

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ونحصل على المعادلات الاتية :

$$x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_3 - 1 = 3$$

وبحل هذه المعادلات نجد ان $x_1 = 3$ ، $x_2 = -1$ ، $x_3 = 4$ وبالتعويض نحصل على ان $v = w$ لتساوى مركباتهما المتناظرة .

وكذلك تكون عمليتا جمع المتجهات والضرب بعدد لها على المصفوفات المكونة عن عمود واحد او صف واحد اذ يمكن نزن كل متجه .

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{او} \quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{في } R^2 \text{ أو } R^3$$

على التوالي . فاذا كان v و w متجهين في R^2 . فان الجمع لهما يكون

$$v + w = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

اى بجمع مركباتهما المتناظرة كذلك اذا كان k اي عدد حقيقي فان

$$kv = k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix}$$

وبطريقة متشابهة للمتجهات في R^3 ، فاذا كانت

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad w = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$ متجهات في R^3

فان جمع v و w يكون كمايلي :

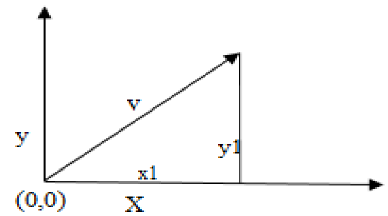
$$v + w = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

والضرب بعدد يكون كمايلي :

$$kv = k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{bmatrix}$$

النظريـــات الاتية تحقق خـــواص الجمع للمتجهات والضرب بعدد لها ٠

طول المتجه في R^2, R^3 : ليكن المتجه $v= (x_1, y_1)$ في الفضاء الثنائي R^2 كما موضح في الشكل التالي:



عندئذ طول المتجه v يرمز له بالرمز $\|v\|$ ويعرف كالتالي $\|v\| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$

اما اذا كان المتجه في الفضاء الثلاثي R^3 فأن $\|v\| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$

مثال: جد طول المتجه $v= (-3, 2, 1)$

الحل:

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

ملاحظة: لحساب المسافة بين نقطتين يتم استخدام القانون التالي

$$d= \|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad R^2$$

$$d= \|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad R^3$$

مثال: جد المسافة بين النقطتين $p_1(3,2), p_2=(-1, 5)$

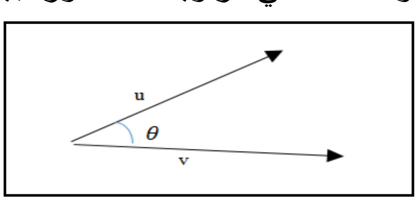
الحل:

$$d= \|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5\ unit$$

<u>ضرب المتجهات:</u>

<u>الضرب النقطي dot product:</u>

تعريف: اذا كان u,v متجهين في الفضاء الثنائي او الثلاثي و كانت θهي الزاوية المحصورة بينهما فأن الضرب العددي (النقطي) يعرف كالتالي:



$u.v = \|u\|.\|v\| \cos\theta$

مثال: اذا كان $u=(0, 0, 1), v= (0, 2, 2)$ و الزاوية θ المحصورة بينهما تساوي 45° جد u.v

الحل:

$u.v = \|u\|.\|v\| \cos\theta$

$\|u\| = \sqrt{0+0+1} = 1$

$\|v\| = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

u.v= $1.\ 2\sqrt{2}.$ Cos 45

$= 1.\ 2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$

* يمكن إيجاد الضرب النقطي لمتجهان بطريقة أخرى باستخدام مركبات المتجهين فاذا كان $u = (u_1, u_2, u_3)$ و $v = (v_1, v_2, v_3)$ فأن $u.v = (u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3)$

مثال: ليكن $u= (2, -1, 1)$ و $v= (1,1,2)$ جد u.v و الزاوية بين u و v

الحل:

u.v= (2.1)+(-1.1)+(1.2) = 2-1+2 = 3

$\|v\| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\|u\| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$u.v = \|u\|.\|v\| \cos\theta$

$3 = \sqrt{6}.\sqrt{6} \cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore \theta = 60^\circ$

نظرية: ليكن u,v متجهين غير صفريين في R^3 او R^2 ولتكن θ هي الزاوية المحصورة بينهما عندئذ

1- $\|v\| = (v.v)^{\frac{1}{2}}$

2- $u.v = 0 \leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

البرهان :

1- لما كانت الزاوية θ بين u,v تساوي صفرا فأن $v.v = \|v\|.\|v\| \cos\theta = \|v\|^2.1$ وعلية

نجد ان $\|v\| = (v.v)^{\frac{1}{2}}$

2- اذا كان $u \neq 0, v \neq 0$ بالفرض فأن $cos\theta = 0 \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ نستنتج منه انت u عمودي على v و

بالعكس اذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فأن $cos\theta = 0$ وبالتالي فأن $u.v = \|u\|.\|v\|.0 = 0$