كلية التربية الأساسية
قسم الرياضيات
المرحلة الثانية

الجبر الخطي

(المحاضرة السادسة)

فضاء الصفوف والاعمدة ورتبة المصفوفة:

تعريف: لتكن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$ مصفوفة من السعة mxn يقال للمتجهات

$\overrightarrow{r_1} = (a_{11}, a_{12}, \dots\dots, a_{1n})$

$\overrightarrow{r_2} = (a_{21}, a_{22}, \dots\dots, a_{2n})$

$\vdots$

$\overrightarrow{r_m} = (a_{m1}, a_{m2}, \dots\dots, a_{mn})$

المكونة من صفوف المصفوفة A بمتجهات الصفوف (row vectors) للمصفوفة A. ويقال للمتجهات المكونة من أعمدة A بمتجهات الاعمدة (column vectors) للمصفوفة A.

$$\overrightarrow{c_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{c_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots\dots, \overrightarrow{c_n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

ويقال للفضاء الجزئي من R^n المتولد من متجهات الصفوف بفضاء الصفوف للمصفوفة A و الفضاء الجزئي من R^m المتولد من متجهات الاعمدة يسمى فضاء الاعمدة للمصفوفة A.

مثال 1: لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ مصفوفة سعة 3x2 فأن متجهات الصفوف

$\overrightarrow{r_1} = (2,3), \overrightarrow{r_2} = (0,5), \overrightarrow{r_3} = (6,7)$

و متجهات الاعمدة $\overrightarrow{c_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \overrightarrow{c_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

مبرهنة1: العمليات الصفية الأولية لا تغير فضاء الصفوف للمصفوفة.

ينتج من المبرهنة السابقة ان فضاء السطور للمصفوفة A لا يتغير عند تحويل المصفوفة الى الصيغة المدرجة الصفية المختزلة. ومن ناحية أخرى فأن متجهات من الصفوف غير الصفرية لمصفوفة من الصيغة المدرجة الصفية تكون عادة مستقلة خطياً. لذلك فأن متجهات الصفوف غير الصفرية تكون أساس لفضاء الصفوف. وعليه نحصل على المبرهنة التالية.

مبرهنة 2: متجهات الصفوف غير الصفرية في الصيغة المدرجة الصفية للمصفوفة A تكون أساس لفضاء الصفوف للمصفوفة A.

مثال 2: جد أساس الفضاء المتولد من المتجهات

$$v_1 = (1,0,1,2,1),\ v_2 = (1,0,1,2,2),\qquad v_3 = (2,1,0,1,2),\ v_4 = (1,2,-1,-1,0)$$

الحل: الفضاء المتولد من هذه المتجهات هو فضاء الصفوف للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

وبأجراء العمليات الصفية البسيطة

$$r_3 = R_3 - R_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_4 = R_4 - R_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = R_2 - R_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{استبدال الصف الثاني بالصف الثالث} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = R_1 - R_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = R_2 - R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ الصيغة المدرجة الصفية للمصفوفة هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان متجهات الصفوف غير الصفرية هي

$$w_1 = (1,0,1,2,0), w_2 = (0,1,-2,-3,0), w_3 = (0,0,0,0,1)$$

وهذه المتجهات هي أساس لفضاء الصفوف و بالتالي هي أساس للفضاء المتولد من $(v_1, v_2 , \ v_3, \ v_4)$

تعريف: يدعى بعد فضاء صفوف المصفوفة بالمرتبة الصفية للمصفوفة ويدعى بعد فضاء أعمدة المصفوفة بالمرتبة العمودية للمصفوفة.

مثال 3: المصفوفة في المثال 2 مرتبتها الصفية تساوي 3.

ملاحظة: لإيجاد أساس لفضاء الاعمدة للمصفوفة A نجد أساس لفضاء الصفوف للمصفوفة A^T. لان فضاء الاعمدة لمصفوفة هو نفسه فضاء الصفوف لمنقول المصفوفة.

مثال 4: جد بعد فضاء الاعمدة للمصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = R_1 - R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = R_1 - R_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = R_2 + R_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = R_1 - (2R_2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ الصيغة المدرجة الصفية للمصفوفة هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

متجهات الصفوف غير الصفرية لمصفوفة النقل A^T (متجهات الاعمدة للمصفوفة الاصلية A) هي

$$w_1 = (1,0,-6), w_2 = (0,1,3)$$

$\therefore$ بعد فضاء الاعمدة = 2

مبرهنة 3: لتكن A مصفوفة من السعة mxn فأن المرتبة الصفية ل A تساوي المرتبة العمودية ل A.

البرهان: لتكن $X_1, X_2, .., X_m$ متجهات صفوف A,حيث ان $X_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})(1 \leq i \leq m)$

لنفرض ان المرتبة الصفية للمصفوفة A تساوي r.

ولتكن مجموعة المتجهات $\{y_1, y_2, .., y_k\}$ أساس لفضاء صفوف A حيث ان $y_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$

وان $r = 1,2, \dots, i$

ان كل متجه هو تركيب خطي من $\{y_1, y_2, .., y_r\}$

$$X_1 = k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + \cdots + k_{1r}y_r$$

$$X_2 = k_{21}y_1 + k_{22}y_2 + \cdots + k_{2r}y_r$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$X_m = k_{m1}y_1 + k_{m2}y_2 + \cdots + k_{mr}y_r$$

حيث ان k_{ij} اعداد حقيقية

ان المصفوفتين تتساويان إذا تساوت مداخلهما المتناظرة وعلية بمساواة المداخل لمعادلات المتجهات نحصل على ان

$$a_{1j} = k_{11}b_{1j} + k_{12}b_{2j} + \cdots + k_{1r}b_{rj}$$

$$a_{2j} = k_{21}yb_{1j} + k_{22}b_{2j} + \cdots + k_{2r}b_{rj}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{mj} = k_{m1}b_{1j} + k_{m2}b_{2j} + \cdots + k_{mr}b_{rj}$$

او

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{rj} \begin{bmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{bmatrix} \ \forall n = 1,2, \dots, j$$

طالما ان كل عمود من A هو تركيب خطي من r من المتجهات فأن بعد فضاء أعمدة A لا يزيد على r او ان المرتبة العمودية ل A $\leq$ r (المرتبة الصفية)، وبنفس الطريقة نحصل على ان المرتبة الصفية ل A $\leq$ المرتبة العمودية ل A وعليه فأن المرتبة الصفية للمصفوفة A تساوي المرتبة العمودية.

مثال 5: جد الرتبة الصفية و العمودية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 5 & -7 & 0 \end{bmatrix}$

الحل: من المبرهنة 3 الرتبة الصفية تساوي العمودية وتساوي رتبة المصفوفة

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -8 & -7 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

وبأجراء العمليات الصفية الأولية

$$r_3 = R_1 + R_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -8 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = R_3 \div 5 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$replacmen\ R_2, R_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = R_3 + 2R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = R_3 \div 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = R_3 - R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = R_3 - R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = R_1 - 2R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ رتبة المصفوفة = الرتبة العمودية = الرتبة الصفية = عدد المتجهات غير الصفرية = 2

واجب:

1- جد اساساً للفضاء الجزئي V من R^3 المولد بواسطة المتجهات
$(-1,-1,2), (2,1,4), (1,2,3), (1,1,1), (0,1,2)$

2- جد أساس الفضاء الجزئي V من R^4 المولد بواسطة المتجهات
$(0,1,1,2), (1,0,-3,1), (1,1,2,1), (0,0,1,1), (1,0,0,1)$

3- جد رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$