كلية التربية الأساسية
قسم الرياضيات
المرحلة الثانية

الجبر الخطي

(المحاضرة السابعة)

التحويلات الخطية:

تعريف: اذا كانت $T: V \rightarrow W$ دالة من فضاء متجهات V الى فضاء متجهات W يقال ل T بأنه تحويل خطي اذا كان لكل متجهين u, v من V فأن

1- $T(u+v) = T(u) + T(v)$

2- $T(ku) = k.T(u)$ حيث $k \in \mathbb{R}$

مثال 1: ليكن $T: R^2 \rightarrow R^3$ دالة معرفة بالشكل $T(x,y) = (y, x+2y, 2x-y)$ هل T يمثل تحويل خطي؟

الحل: ليكن $u = (x_1, y_1),\ v = (x_2, y_2)$

1- $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(u+v) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2, 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2)$

الطرف الايسر

$T(u) + T(v) = (y_1, x_1 + 2y_1, 2x_1 - y_1) + (y_2, x_2 + 2y_2, 2x_2 - y_2)$

$= (y_1 + y_2, x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2, 2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_1)$

الطرف الايمن

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الايسر

2- $ku = (kx_1, ky_1)$

$T(ku) = (ky_1, kx_1 + 2ky_1, 2kx_1 - ky_1)$

الطرف الايسر

$k.T(u) = k\ (y_1, x_1 + 2y_1, 2x_1 - y_1)$

$= \ (ky_1, kx_1 + 2ky_1, 2kx_1 - ky_1)$

الطرف الايمن

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الايسر

$\therefore$ $T: R^2 \rightarrow R^3$ تحويلاً خطياً

مثال 2: هل التحويل $T: R^2 \to R^2$ المعرفة بالقاعدة $T(x,y) = (x, y+1)$ يمثل تحويلاً خطياً؟

الحل: $u = (x_1, y_1) \quad , \; v = (x_2, y_2)$

1- $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(u+v) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 1)$

الطرف الايسر

$T(u) + T(v) = (x_1, y_1 + 1) + (x_2, y_2 + 1)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 2)$

الطرف الايمن

∴ الطرف الايسر $\neq$ الطرف الأيمن

∴ التحويل ليس تحويلاً خطياً

مثال 3: بين فيما اذا كان التحويل $T: R^2 \to R^2$ و المعرف بالقاعدة $T(x,y) = (x, -y)$ تحويلاً خطياً ام لا؟

الحل: $v = (x_2, y_2) \qquad u = (x_1, y_1),$

1- $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(u+v) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2)$ الطرف الايسر

$T(u) + T(v) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2)$

$= (x_1 + x_2, -y_1 - y_2)$ الطرف الايمن

∴ الطرف الأيمن = الطرف الايسر

2- $ku = (kx_1, ky_1)$

$T(ku) = (kx_1, -ky_1)$ الطرف الايسر

$k.T(u) = k\,(x_1, -y_1) = (kx_1, -ky_1)$ الطرف الايمن

∴ الطرف الايسر = الطرف الأيمن

∴ التحويل $T: R^2 \to R^2$ يمثل تحويل خطي.

التحويل المصفوفي: لتكن A مصفوفة من السعة mxn اذا استخدمنا صيغة المصفوفة للمتجهات في فضاء R^m, R^n. عندئذ يمكننا تعريف التحويل $T: R^n \to R^m$ بالشكل $T(x) = Ax$ حيث x مصفوفة من السعة $nx1$ ان حاصل الضرب Ax مصفوفة سعة $mx1$ يمكن اثبات T تحويل خطي وذلك بفرض ان u, v مصفوفتان سعة كل منهما $nx1$ و k عدد حقيقي

1- $A(u+v) = Au + Av$

2- $A(ku) = k(Au)$

مثال 4: ليكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ فأن التحويل $T: R^2 \to R^3$ والمعرف بالقاعدة $T(x) = Ax$ هل هذا التحويل يمثل تحويلاً خطياً؟

الحل:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

1- $u + v = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

$$A(u+v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$A(u) + A(v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - y_2 \\ x_2 + y_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

2- $ku = \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix}$

$$A(ku) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 - ky_1 \\ kx_1 + ky_1 \\ 3kx_1 \end{bmatrix}$$

$$k(Au) = k\begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 - ky_1 \\ kx_1 + ky_1 \\ 3kx_1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ التحويل يمثل تحويلاً خطياً

ملاحظات:

1- التحويل $T: V \to W$ بحيث $T(v) = 0 \quad \forall v \in V$ هو تحويل خطي يطلق علية اسم التحويل الصفري.

2- التحويل $T: V \to W$ بحيث $T(v) = v \quad \forall v \in V$ هو تحويل خطي يطلق عليه اسم التحويل الذاتي.

3- التحويل $T: V \to W$ بحيث $T(v) = kv \quad \forall v \in V, k \in \mathbb{R}$ هو تحويل خطي يطلق عليه تمدد اذا كان $(k > 1)$ و انكماش اذا كان $(0 < k < 1)$

مثال 5: لتكن v_1, v_2, v_3 متجهات في R^3 , $T: R^3 \to R^3$ تحويل خطي بحيث ان $T(v_1) = (1,-1,2), T(v_2) = (0,2,-1), T(v_3) = (-1,2,0)$ جد

1- $T(v_1 - 3v_2 + 4v_3)$

2- $T(\frac{-1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3)$

الحل:

1- $T(v_1 - 3v_2 + 4v_3) = T(v_1) - 3T(v_2) + 4T(v_3)$

$$= (1,-1,2) - (0,6,-3) + (-4,8,0)$$

$$= (-3,1,5)$$

2- $T\left(\frac{-1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3\right) = \frac{-1}{2}T(v_1) + \frac{1}{2}T(v_2) - \frac{1}{2}T(v_3)$

$$= \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) + \left(0,1,\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -1,0\right)$$

$$= (0, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2})$$

مبرهنة: اذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فان

1. $T\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$.
2. $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$ لكل $\vec{v} \in V$.
3. $T(\vec{v} - \vec{w}) = T(\vec{v}) - T(\vec{w})$ لكل $\vec{v}, \quad \vec{w} \in V$.

البرهان: ليكن $\vec{v}$ أي متجه في V

1. بما ان $0\vec{v} = \vec{0}$ اذن $T\left(\vec{0}\right) = T(0\vec{v}) = 0T(\vec{v}) = \vec{0}$
2. $T(-\vec{v}) = T(-1.\vec{v}) = -T(\vec{v})$
3. $T(\vec{v} - \vec{w}) = T(\vec{v} + (-1).\vec{w}) = T(\vec{v}) + (-1).T(\vec{w}) = T(\vec{v}) - T(\vec{w})$

نظرية:- ليكن $T: V \to W$ تحويلاً خطياً من فضاء المتجهات V الى W ولتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساس للفضاء V. اذا كان v متجهاً في V فأن T(v) سيحدد بصورة كاملة بواسطة

$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$

البرهان:

بما ان v متجهاً في V وS أساس ل V فتستطيع ان تكتب

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$$

وبأجراء التحويل

$$T(v) = T(k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n)$$

بما ان التحويل هو تحويل خطي يعني انه يحقق الشرطين وبذلك يكون

$$T(v) = T(k_1v_1) + T(k_2v_2) + \cdots + T(k_nv_n)$$
$$T(v) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + \cdots + k_nT(v_n)$$

وهذا يعني T(v) حدد بواسطة $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$

واجبات:

1- **قرر فيما اذا كان التحويل $T: R^2 \to R^2$ والمعرف بالقاعدة $T(x, y) = (y, x - 1)$ تحويلا خطياً ام لا؟**

2- **قرر فيما اذا كان التحويل $T: M_{2x2}(R) \to R^3$ و المعرف بالقاعدة $T\begin{bmatrix} x & -y \\ z & w \end{bmatrix} = (x - y, 0, z + w)$ تحويلاً خطياً ام لا؟**

3- **اثبت ان التحويل $T: M_{2x2}(R) \to P_1(R)$ و المعرف بالقاعدة $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + (2b - c)x$ تحويلاً خطياً.**

<u>نواة ومدى التحويل الخطي:</u>

تعريف: ليكن $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً فأن مجموعة جميع المتجهات في V التي صورة كل منها بواسطة T تساوي صفر تسمى نواة T و تكتب ker(T). اما مجموعة جميع المتجهات في W والتي عبارة عن صورة لعلى الأقل متجه واحد في V بواسطة T تسمى مدى T وتكتب ran(T).

يمكن تعريف كل من ker(T) و ran(T) جبرياً على النحو التالي

$$\ker(T) = \{v \in V: T(v) = 0\}$$

$$ran(T) = \{w \in W: \exists v \in V, T(v) = w\}$$

مثال 6: ليكن $T: R^3 \rightarrow R^3$ والمعرف بالصيغة $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ تحويلاً خطياً جد ker(T), ran(T)

الحل: واضح ان المتجهات التي يكون مركباتها باتجاه x,y تساوي صفر تكون صورتها بواسطة T هي المتجه الصفري لذا فأن

$$\ker(T) = \{(0,0, c): c \in \mathbb{R}\}$$

اما صورة T فتكون من جميع المتجهات في المستوى xy

$$ran(T) = \{(a, b, 0): a, b \in \mathbb{R}\}$$

نظرية: ليكن $T: V \rightarrow W$ تحويلاً خطياً فأن ker(T) فضاء جزئي من V و ran(T) فضاء جزئي من W.

البرهان:

Ker(T) فضاء جزئي من V : لكي يكون ker(T) فضاء جزئي من V يجب علينا اثبات انها مغلقة بتأثير عملية و الضرب بعدد نفرض $u, v \in \ker(T)$

1- $T(u + v) = T(u) + T(v)$

$= 0 + 0 = 0$

∴ مغلقة بتأثير عملية الجمع

2- $T(kv) = kT(v)$

$= k.0 = 0$

∴ مغلقة بتأثير عملية الضرب بعدد

∴ ker(T) فضاء جزئي من V

نفرض ان $w_1, w_2 \in Im(T)$ المطلوب اثبات $(w_1 + w_2) \in Im(T), k(w_1) \in Im(T)$ أي يجب إيجاد متجهين (a, b) في V بحيث $T(a) = w_1 + w_2,\ T(b) = k(w_1)$

بما ان $w_1, w_2 \in Im(T)$ فأن يوجد متجهات في $a_1, a_2 \in V$ بحيث $T(a_1) = w_1,\ T(a_2) = w_2$

نفرض:

$a_1 + a_2 = a$

$ka_1 = b$

$T(a) = T(a_1 + a_2)$

$= T(a_1) + T(a_2)$

$= w_1 + w_2$

$T(b) = T(ka_1) = kT(a_1) = kw_1$

∴ Im(T) فضاء جزئي من W

مثال7: اذا كان $T: R^2 \to R^2$ هو عملية الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ بين أي المتجهات التالية تقع في نواة T $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و أي من المتجهات تقع في مدى T $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ؟

الحل:

$$T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \ker(T)$$

$$T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & -1\\-8 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-16\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\notin \ker(T)$$

$$T\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & -1\\-8 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2a-b\\-8a+4b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}\Longrightarrow$$

$2a-b=1\ldots\ldots(1)\quad x4$

$-8a+4b=-4\ldots..(2)$

$$0+0=0\Longrightarrow\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}\in ran(T)$$

$$T\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2 & -1\\-8 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}2a-b\\-8a+4b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow$$

$2a-b=5\ldots\ldots(1)\quad x4$

$-8a+4b=0\ldots..(2)$

$$0+0\neq 20\Longrightarrow\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}\notin ran(T)$$