كلية التربية الأساسية
قسم الرياضيات
المرحلة الثانية

الجبر الخطي

(المحاضرة الثالثة)

- درسنا فيما سبق تعريف المتجهات في الفضاء الثنائي R^2 والفضاء الثلاثي R^3 يمكن تعميم جميع التعاريف والخواص على فضاءات أخرى بشكل عام. فيمكن مثلا اعتبار رباعيات الاعداد الحقيقية (a_1, a_2, a_3, a_4) كنقطة في الفضاء الرباعي R^4 وهكذا الفضاء R^5 و R^6 و الخ.....

مثال: ليكن $v= (2,3,2,-1)$ و $u= (4, 2, 1, 3)$ متجه في R^4 جد 1: u+v   2: $\|u\|$ 3: u.v

الحل:

v+u= (4+2, 2+3, 1+2, 3-1)

= (6, 5, 3, 2)

$$\|u\| = \sqrt{16+4+1+9} = \sqrt{30}$$

$$u.v = (\,4.2 + 3.2 + 2\,.1 + (-1).3) = 13$$

مثال: ليكن $u=(1,0,0,1),\ v= (0,1,0,1)$ جد الزاوية بين المتجهين

$$u.v = 1.0 + 0.1 + 0.0 + 1.1 = 1$$

$$\|u\| = \sqrt{1+0+0+1} = \sqrt{2}$$

$$\|v\| = \sqrt{0+1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$u.v = \|u\|.\|v\|\, cos\theta$$

$$1 = \sqrt{2}\,.\sqrt{2}\, cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \ \ \theta = 60°$$

فضاء المتجهات (vector space):

تعريف: لتكن V مجموعة غير خالية معرف عليها عمليتا الجمع والضرب في اعداد حقيقية تسمى V فضاء متجهاً حقيقي وتسمى عناصر V متجها إذا تحققت الشروط التالية:

1. اذا كان $\vec{u},\ \vec{v}$ عنصرين من V فان $\vec{u}+\vec{v}$ ينتمي الى V.
2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ لكل $\vec{u},\ \vec{v}\in V$.
3. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ لكل $\vec{u},\ \vec{v},\vec{w}\in V$.
4. يوجد $\vec{0}\in V$ بحيث يكون $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ لكل $\vec{u}\in V$.
5. لكل $\vec{u}\in V$ يوجد $-\vec{u}\in V$ بحيث $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$.
6. اذا كان k عددا حقيقيا وكان $\vec{u}$ اي عنصر في V فان $k\vec{u}\in V$.
7. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$.
8. $(k_1+k_2)\vec{u}=k_1\vec{u}+k_2\vec{u}$ حيث k_1,k_2 أعداد حقيقية.
9. $k_1(k_2\vec{u})=(k_1k_2)\vec{u}$.
10. $1.\ \vec{u}=\vec{u}$

مثال: هل R^3 يمثل فضاء متجهات؟

الحل: ليكن $w=(w_1,w_2,w_3)$, $\quad v=(v_1,v_2,v_3),\quad u=(u_1,u_2,u_3)$

$1:\ v+u=(v_1+u_1,v_2+u_2,\ v_3+u_3)\ \in R^3$

اذن تحقق الشرط الأول

$2:\ v+u=(v_1+u_1,v_2+u_2,\ v_3+u_3)$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2 , u_3 + v_3)$

$= u + v$

خاصية الابدال متحققة

3: $u + (v + w) = (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$

$=(u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), u_3 + (v_3 + w_3))$

$=((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, (u_3 + v_3) + w_3)$

$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2 , u_3 + v_3)+ (w_1, w_2, w_3)$

$= (u + v) + w$

الخاصية التجميعية متحققة

4: let 0= (0,0,0)∈ R^3 then ∀ $v \in R^3$

$v + 0 = (v_1 + 0, v_2 + 0, v_3 + 0)$

$= (v_1, v_2, v_3)$

5: ∀ $(u_1, u_2, u_3) \in R^3$, $-u = (-u_1, -u_2, -u_3)$

$u + (-u) = (u_1 - u_1, u_2 - u_2, u_3 - u_3)$

= (0, 0, 0)

6: $ku = k(u_1, u_2, u_3) = (ku_1, ku_2, ku_3) \in R^3$

7: if $k \in R, u, v \in R^3$ $then$

$k(u + v) = k(u_1 + v_1, u_2 + v_2 , u_3 + v_3)$

$= (k(u_1 + v_1), k(u_2 + v_2), k(u_3 + v_3))$

$= \left((ku_1 + kv_1), (ku_2 + kv_2), (ku_3 + kv_3)\right)$

$= k(u_1, u_2, u_3) + k(v_1, v_2, v_3)$

$= ku + kv$

8: if $k_1, k_2 \in R$, $u \in R^3$ then

$(k_1 + k_2)u = (k_1 + k_2)\ (u_1, u_2, u_3)$

$= \big((k_1 + k_2)u_1, (k_1 + k_2)u_2, (k_1 + k_2)u_3\big)$

$= (k_1u_1 + k_2u_1, k_1u_2 + k_2u_2, k_1u_3 + k_2u_3)$

$= (k_1u_1, k_1u_2, k_1u_3) + (k_2u_1, k_2u_2, k_2u_3)$

$= k_1u + k_2u$

9: $k_1(k_2u) = k_1(k_2u_1, k_2u_2, k_2u_3)$

$= (k_1(k_2u_1), k_1(k_2u_2), k_1(k_2u_3)$

$= \big((k_1k_2)u_1, (k_1k_2\big)u_2, (k_1k_2)u_3)$

$= (k_1k_2)u$

10: $1.u = 1.(u_1, u_2, u_3)$

$= (1.u_1, 1.u_2, 1.u_3)$

$= (u_1, u_2, u_3) = u$

∴ R^3 يمثل فضاء متجهات

مثال: لتكن $V=R^3$ مجموعة جميع الثلاثيات المرتبة من الاعداد الحقيقية (x, y, z) وبعمليتي الجمع والضرب بعدد على النحو التالي:

$(x, y, z) + (z, y, z) = (x + x, y + y, z + z)$

$k(x, y, z) = (kx, y, z)$

الحل: من السهول التحقق من الشروط 1-5 اما بالنسبة للشرط 8 فنلحظ ان:

$$(k_1 + k_2)(x, y, z) = ((k_1 + k_2)x, y, z)$$

هذا من ناحية ومن ناحية أخرى

$$k_1(x, y, z) + k_2(x, y, z) = (k_1x, y, z) + (k_2x, y, z)$$

$$= (k_1x + k_2x, 2y, 2z)$$

لذا فأن

$$(k_1 + k_2)(x, y, z) \neq k_1(x, y, z) + k_2(x, y, z)$$

$\therefore$ V ليس فضاء متجهات

نظرية: ليكن V فضاء متجه و u متجهاً في V و k عدداً حقيقياً. عندئذ:

$1:\ 0.u = 0$

$2:\ k.0 = 0$

$3:\ (-1)u = -u$

$4:\ if\ k.u = 0\ then\ k = 0\ or\ u = 0$

البرهان:

1: من الشرط 8 يمكن كتابة

$$0.u + 0.u = (0 + 0)u = 0.u$$

نضيف $-0.u$ الى الطرفين فنحصل على

$$(0.u + 0.u) + (-0.u) = 0.u + (-0.u)$$

$$0.u + (0.u + (-0.u) = (0.u) + (-0.u)$$

$0.u + 0 = 0$ حسب الشرط 5

$0.u = 0$ حسب الشرط 4

2: حسب الشرط 7

$k.0 = k(0 + 0) = k.0 + k.0$

نضيف (k.0-) الى الطرفين فنحصل على

$k.0 = 0$

3: حسب الشرط 8

$(1 + (-1))u = 1.u + (-1).u$

$0.u = 1.u + (-1)u$

$0 = 1.u + (-1.u)$ حسب برهان 1

$0 = u + (-1).u$ حسب شرط 10

$-1.u = -u$

4: H.W

واجبات:

1: لتكن V مجموعة كل الأزواج من الاعداد الحقيقية مع العمليتين

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\ , \qquad k(x, y) = (2kx, 2ky)$

هل V تمثل فضاء متجهات

2: مجموعة جميع المصفوفات من السعة 2x2 التي على الصورة $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ $a, b \in R$

الفضاءات الجزئية:

تعريف: لتكن W مجموعة جزئية من فضاء المتجهات V تسمى W فضاء جزئي من V اذا كانت W فضاءاً متجهاً بالنسبة لعمليتي الجمع و الضرب بعدد المعرفتين على V المقصورتين على W.

• **تكون المجموعة الجزئية من فضاء المتجهات فضاء جزئي إذا تحقق شرطين:** 1- اذا كانت $w_1, w_2 \in W$ فأن $w_1 + w_2 \in W$ 2- اذا كان $w_1 \in W$ و $k \in \mathbb{R}$ فأن $kw_1 \in W$

- أي فضاء متجهات غير صفري يحوي على الأقل فضائيين جزئيين هما الفضاء المتجه نفسه و $\{0\}$

مثال: لتكن W مجموعة جزئية غير خالية من فضاء المتجهات R^3 بحيث W تحتوي على جميع المتجهات التي على الصورة (a, b, 0) اذ ان a,b عددان حقيقيان. هل W تمثل فضاء جزئي من R^3.

الحل:

$$w_1 = (a_1, b_1, 0) \qquad , \qquad w_2 = (a_2, b_2, 0)$$

1- $(w_1 + w_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0) \in W$

2- $kw_1 = (ka_1, kb_1, 0) \in W$

$\therefore$ W فضاء جزئي من R^3

مثال:لتكن W مجموعة جميع المصفوفات من السعة 2x3 التي من الصيغة $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$ وليكن V فضاء متجهاً يحتوي على جميع المصفوفات من السعة 2x3 مع عمليتي جمع المصفوفات والضرب بعدد الاعتياديتين. برهن ان W فضاء جزئي من V.

الحل:

$$w_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \qquad w_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

1- $w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in W$ $\therefore$ مغلقة بتأثير عملية الجمع

2- $kw_1 = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & kc_1 & kd_1 \end{bmatrix} \in W$ ∴ مغلقة بتأثير عملية الضرب بعدد

∴ W فضاء جزئي من V

مثال: هل W (مجموعة جميع المتجهات من الصيغة (a, b, c) بحيث $b = a + c + 1$) فضاء جزئي من R^3 ؟

الحل:

$$w_1 = (a_1, b_1, c_1) = (a_1, a_1 + c_1 + 1, c_1), w_2 = (a_2, b_2, c_2) = (a_2, a_2 + c_2 + 1, c_2)$$

1- $w_1 + w_2 = (a_1 + a_2, a_1 + c_1 + 1 + a_2 + c_2 + 1, c_1 + c_2)$

$$= (a_1 + a_2, a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + 2, c_1 + c_2) \notin W$$

∴ W لا تمثل فضاء جزئي

نظرية: إذا كان W, U فضائيين جزئيين من V فأن U∩W فضاء جزئي من V.

البرهان:

نفرض وجود عنصرين A, B

$A, B \in U \cap W$

$\rightarrow A, B \in U, \quad A, B \in W$

وبما ان U, W فضائيين جزئيين

$A + B \in U$

$kA \in U$

$A + B \in W$

$kA \in W$

$\therefore A + B \in U \cap W$

$kA \in U \cap W$

∴ U∩W فضاء جزئي من V

واجبات:

1- هل مجموعة جميع المتجهات من الصيغة (a, b, c) بحيث $b = a + c$ تمثل فضاء جزئي من R^3؟

2- هل مجموعة المتجهات من الصيغة (a,1,1) فضاء جزئي من R^3؟

3- هل المجموعة الجزئية الاتية من فضاء المتجهات من المصفوفات 2x3 تمثل فضاء جزئي $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}$ حيث $a + c = b$