كلية التربية الأساسية
قسم الرياضيات
المرحلة الثانية

الجبر الخطي

(المحاضرة الرابعة)

التركيب الخطي:

تعريف: يقال للمتجه بأنه تركيب خطي للمتجهات $v_1, v_2, \dots \dots, v_n$ اذا امكن كتابته بالصيغة

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n \qquad (k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R})$$

مثال1 : لتكن $v_1 = (1,2,1,-1)$ و $v_2 = (1,0,2,-3)$ و $v_3 = (1,1,0,-2)$ متجهات في R^4. بين ان المتجه $v = (2,1,5,-5)$ تركيب خطي من v_1, v_2, v_3.

الحل: لكتابة v تركيب خطي للمتجهات v_1, v_2, v_3 يجب ان نجد اعداد حقيقية k_1, k_2, k_3 بحيث تكون

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

$$(2,1,5,-5) = k_1(1,2,1,-1) + k_2(1,0,2,-3) + k_3(1,1,0,-2)$$

$$(2,1,5,-5) = (k_1, 2k_1, k_1, -k_1) + (k_2, 0, 2k_2, -3k_2) + (k_3, k_3, 0, -2k_3)$$

$$(2,1,5,-5) = (k_1 + k_2 + k_3, 2k_1 + 0 + k_3, k_1 + 2k_2 + 0, -k_1 - 3k_2 - 2k_3)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$2k_1 + k_3 = 1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$k_1 + 2k_2 = 5 \dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

$$-k_1 - 3k_2 - 2k_3 = -5 \dots\dots\dots(4)$$

من المعادلة (2) نحصل على $(k_3 = 1 - 2k_1)$ و من المعادلة (3) نحصل على $k_2 = \frac{5-k_1}{2}$ و

بالتعويض في معادلة (1) نحصل على

$$k_1 + \frac{5 - k_1}{2} + (1 - 2k_1) = 2 \qquad x\,2$$

$$2k_1 + 5 - k_1 + 2 - 4k_1 = 4 \;\rightarrow\; k_1 = 1$$

وبتعويض قيمة $(k_1 = 1)$ في المعادلتين (2), (3) نحصل على $k_2 = 2, k_3 = -1$

∴ v هو تركيب خطي

مثال2 : ليكن $v_2 = (1,0,-1)$, $v_1 = (1,2,-1)$ متجهين في R^3 هل ان المتجه $v = (1,0,2)$ تركيب خطي للمتجهين v_1, v_2 ؟

الحل:

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2$$

$$(1,0,2) = k_1(1,2,-1) + k_2(1,0,-1)$$

$$(1,0,2) = (k_1, 2k_1, -k_1) + (k_2, 0, -k_2)$$

$$k_1 + k_2 = 1 \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$2k_1 = 0 \rightarrow k_1 = 0 \ldots\ldots(2)$$

$$-k_1 - k_2 = 2 \qquad \ldots\ldots(3)$$

وبتعويض $k_1 = 0$ من المعادلة 2 في 1 و 3 نحصل على قيم مختلفة ل k_2

$$0 + k_2 = 1 \rightarrow k_2 = 1$$

$$0 - k_2 = 2 \rightarrow k_2 = -2$$

$$-2 \neq 1$$

$\therefore$ v ليس تركيب خطي من المتجهين v_1, v_2 .

تعريف: لتكن $S = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ مجموعة متجهات في فضاء متجه V. يقال ان المجموعة S تولد V او V مولدة بواسطة S اذا كان كل متجه في V تركيباً خطياً من متجهات S.

مثال3 : ليكن $V = R^3$ ولتكن $S=\{v_1, v_2, v_3\}$ بحيث يكون $v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,0,2), v_3 =$ (1,1,0) لمعرفة S تولد R^3 نتبع ما يلي ليكن $v \in V$ بحيث يكون v=(a, b, c)

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

لذا نحصل على نظام المعادلات الاتية

$$k_1 + k_2 + k_3 = a$$

$$2k_1 + k_3 = b$$

$$k_1 + 2k_2 = c$$

نفرض a=1, b=1, c=1

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. (1)$$

$$2k_1 + k_3 = 1 \ \rightarrow k_3 = 1 - 2k_1 \dots\dots. (2)$$

$$k_1 + 2k_2 = 1 \ \rightarrow \ k_2 = \frac{1 - k_1}{2} \ \dots\dots. (3)$$

$$k_1 + \frac{1 - k_1}{2} + (1 - 2k_1) = 1 \quad x\ 2$$

$$2k_1 + 1 - k_1 + 2 - 4k_1 = 2 \ \rightarrow \ k_1 = \frac{1}{3}, k_2 = \frac{1}{3}, k_3 = \frac{1}{3}$$

وبهذا أي متجه $v \in V$ يكون تركيب خطي لمتجهات S

$\therefore$ S تولد R^3

مثال4 : لتكن $S=\{v_1, v_2, v_3\}$ بحيث يكون $v_1 = (3,1,2), v_2 = (1,0,1), v_3 = (2,5,-3)$ هل ان S تولد R^3؟

الحل: ليكن $v= (1,1,1)$ متجهاً في R^3 عندئذ

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

$$(1,1,1) = k_1(3,1,2) + k_2(1,0,1) + k_3(2,5,-3)$$

$3k_1 + k_2 + 2k_3 = 1 \ldots \ldots (1)$

$k_1 + 5k_3 = 1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$

$2k_1 + k_2 - 3k_3 = 1 \ldots \ldots . (3)$

ولحل هذا النظام نلحظ ان مصفوفة المعاملات هي:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

ونلحظ ان محدد المصفوفة يساوي صفر (A غير قابلة للانعكاس) وعند حل النظام بطريقة كرامر نلحظ ان ليس له حل وبهذا تكون S لا تولد R^3.

الاستقلال الخطي:

تعريف: لتكن $S = \{v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n\}$ مجموعة متجهات في فضاء متجه V. يقال ان متجهات S او $v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n$ مستقلة خطياً اذا و فقط كانت

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$$

تستلزم أن

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$$

وتسمى متجهات S او $v_1, v_2, \ldots \ldots, v_n$ مرتبطة خطياً اذا و فقط اذا يوجد اعداد $k_1, k_2, \ldots \ldots, k_n$ ليست جميعها اصفار بحيث

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$$

او إذا لم تكن مستقلة خطياً

مثال5 : لتكن $v_1 = (1,0,2)\ ,\ \ v_2 = (0,-1,3), v_3 = (-2,0,1)$ متجهات في R^3. هل ان v_1, v_2, v_3 مستقله خطياً؟

الحل: نفرض ان $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$

$$k_1(1,0,2) + k_2(0,-1,3) + \ k_3(-2,0,-1) = 0$$

$$k_1 - 2k_3 = 0 \ldots \ldots (1)$$

$$-k_2 = 0 \ \rightarrow\ k_2 = 0 \ldots . (2)$$

$$2k_1 + 3k_2 + k_3 = 0 \ \ldots \ldots (3)$$

نعوض $k_2 = 0$ في المعادلة 3 نحصل على

$$k_1 - 2k_3 = 0 \ldots \ldots (1)$$

$$2k_1 + k_3 = 0 \ \ldots \ldots (3)$$

و بحل المعادلتين نحصل على $k_1 = 0, k_3 = 0$

$\therefore$ المتجهات مستقله خطياً

مثال6 : هل المتجهات $v_1 = (1,-1), v_2 = (2,-3), v_3 = (5,1)$ مرتبطة خطياً؟

الحل: نفرض وجود k_1, k_2, k_3 اعداد بحيث يكون:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

$$k_1(1,-1) + k_2(2,-3) + k_3(5,1) = 0$$

$$k_1 + 2k_2 + 5k_3 = 0$$

$$-k_1 - 3k_2 + k_3 = 0$$

هذا النظام يكون من معادلتين وثلاثة متغيرات فيتم الحل بأعطاء قيم اختيارية الى k_3 و بالتالي نجد قيم k_1, k_2 فمثلاً اذا كان $k_3 = 1$ وبالتالي قيم $k_1 = -17, k_2 = 6$ وبهذا نستنتج ان v_1, v_2, v_3 مرتبطة خطياً.

نظرية: لتكن $S = \{v_1, v_2, \dots\dots, v_n\}$ مجموعة متجهات غير صفرية في فضاء متجه V فأن S مرتبطة خطياً اذا واذا فقط كان احد المتجهات v_i تركيباً خطياً من المتجهات التي قبله في المجموعة S.

البرهان:

إذا كان v_i هو تركيب خطي من المتجهات التي قبله في S فأن

$$v_i = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_{i-1}v_{i-1}$$

اذ ان $k_1, k_2, \dots, k_{i-1}$ اعداد نستنتج ان

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_{i-1}v_{i-1} + (-1)v_i + (0)v_{i+1} + \cdots + (0)v_n = 0$$

أي ان المجموعة $S = \{v_1, v_2, \dots\dots, v_n\}$ مرتبطة خطياً لوجود واحد من المعاملات (-1).

نظرية : اذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots\dots, v_n\}$ مجموعة متجهات مستقلة خطياً فأن أي مجموعة جزئية من S بواحد او اكثر من المتجهات هي ايضاً مجموعة مستقله خطياً.

البرهان: لنفرض T مجموعة جزئية من S ولنفرض ان متجهات T هي

$$v_1, v_2, v_3, \dots\dots, v_m \,;\, m < n$$

التي هي من S فأذا لم تكن T مستقله خطياً فأن توجد اعداد ليست جميعها اصفار مثل $k_1, k_2, \dots, k_m$

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_mv_m = 0$$

ولنفرض المتجهات $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots\dots, v_n$ تمثل المتجهات التي تنتمي الى S ولا تنتمي الى T عندئذ

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_mv_m + 0.\,v_{m+1} + 0.\,v_{m+2} + \cdots + 0.\,v_n = 0$$

يؤلف ارتباط خطياً بين متجهات S يساوي متجهاً صفرياً ولكن ليست كل المعاملات في هذا الارتباط اصفار مما يجعل المجموعة S ليست مستقلة خطياً وهذا يخالف الفرض لذلك فأن المجموعة الجزئية T يجب ان تكون مستقلة خطياً.

واجبات:

1: هل مجموعة المتجهات $v_1 = (2,-1,3), v_2 = (4,1,2), v_3 = (8,-1,8)$ تولد الفضاء R^3؟

2: هل مجموعة المتجهات S= {(1,0,0), (1,1,1),(1,2,3)} مستقلة خطياً؟

3: هل المتجه $v = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ هو تركيب خطي من المتجهات $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$