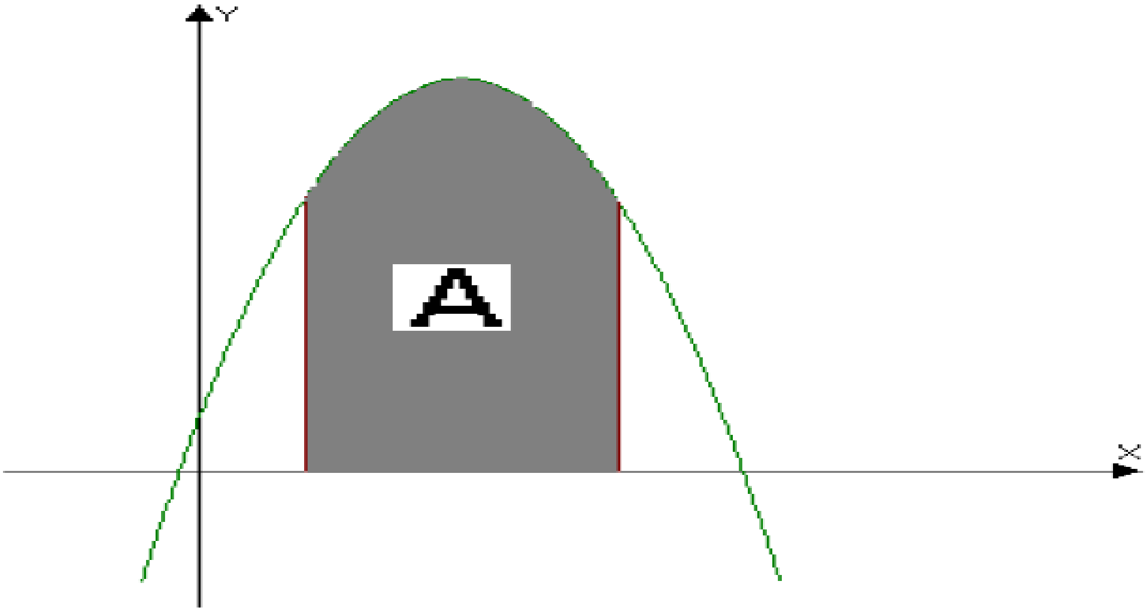
المساحة المحددة بمنحنى الدالة



$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

طريقة الحل كما يلي:

١) نساوي الدالة بالصفر ونجد قيمة x ونقارنها مع الفترة ان كانت تنتمي أو لا تنتمي فاذا كانت تنتمي الى الفترة نجزئها ليكون التكامل $A = \int + \int + \int$

٢) نكامل الدالة تكامل محدد ثم تكون المساحة مساويه لمجموع المساحات المطلقة لكل مساحه.

٣) اذا لم يعطي فترة في السؤال فان الفترة تكون قيم (x) الناتجة من مساوات الدالة بالصفر.

٤) اذا كانت الدالة من الدوال المثلثية نجد قيم (x) بالاعتماد الجدول الخاص بايجاد قيم الزواية للدوال المثلثية ونرى هل تنتمي او لا تنتمي للفترة المعطاة.

سؤال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

الجواب:

$$0 = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$0 = x(x^2 - 3x + 2)$$

$$0 = x(x-2)(x-1)$$

$$\therefore x = 0 , \quad x = 2 , \quad x = 1$$

∴ الفترات هي $[0,1] , [1,2]$

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx .$$

$$A = \left|\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right|_0^1 + \left|\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right|_1^2$$

$$A = \left|\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right|_0^1 + \left|\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right|_1^2$$

$$A = \left|\left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - (0)^3 + (0)^2\right)\right| + \left|\left(\frac{(2)^4}{4} - (2)^3 + (2)^2\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + (1)^2\right)\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - 0\right| + \left|\left(\frac{16}{4} - 8 + 4\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|(4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4}\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right|$$

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ وحده مربعه

سؤال: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$

الجواب:

$$0 = x^3 - 4x$$

$$0 = x(x^2 - 4)$$

$$0 = x(x-2)(x+2)$$

$$x = 0, x = 2, x = -2$$

∴ الفتره هي $[-2, 0]$ ، $[0, 2]$

$$A = \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)\,dx \quad + \quad \int_{0}^{2}(x^3 - 4x)\,dx$$

$$A = \left|\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right|_{-2}^{0} + \left|\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right|_{0}^{2}$$

$$A = \left|\left(\frac{(0)^4}{4} - \frac{4(0)^2}{2}\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{4(-2)^2}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{(2)^4}{4} - \frac{4(2)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - \frac{4(0)^2}{2}\right)\right|$$

$$A = \left|0 - \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{16}{4} - \frac{16}{2}\right) - 0\right|$$

$$A = |-4 + 8| + |4 - 8|$$

$$A = |4| + |-4|$$

$$A = 4 + 4$$

$A = 8$ وحده مربعه

سؤال: اوجد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y= x^2$ والمحور السيني والمستقيم $x = 1$ و $x = 3$

الجواب:

$0 = x^2$

$x = 0$

$\therefore x = 0$ لا تنتمي للفترة[3,1]

$\therefore$ الفترة هي $[1,3]$

$A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 x^2 \; dx$.

$$A = \left|\frac{x^3}{3}\right|_1^3$$

$$A = \left|\left(\frac{(3)^3}{3}\right) - \left(\frac{(1)^3}{3}\right)\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{27}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\right|$$

$$A = \left|(9) - \left(\frac{1}{3}\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{26}{3}\right|$$

$A = \frac{26}{3}$ وحده مربعه

سؤال: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات والمستقيم x = 0 و x = 1

الجواب:

$0 = \sqrt{x}$ نربع الطرفين

$0 = x$

$\therefore x = 0$ تنتمي للفترة [1,0]

$\therefore$ الفترة $[0, 1]$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x})\, dx$$

$$A = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}})\, dx$$

$$A = \left| \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \right|$$

$$A = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^1$$

$$A = \left| \left(\frac{2}{3} \sqrt{(1)^3} \right) - \left(\frac{2}{3} \sqrt{(0)^3} \right) \right|$$

$$A = \left| \frac{2}{3} - 0 \right|$$

$A = \left| \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$ وحدة مساحه

سؤال: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = sinx$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$

الجواب:

اي داله يكون الـ sin لها صفر $sinx = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi, -\pi, -2\pi$

ملاحظة: اذا الزاوية صفر تأخذ (موجب و سالب)

$$x = 0 \in \left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$$

∴ الفترات $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right], [0, \pi]$

$$A = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} sinx\ dx + \int_{0}^{\pi} sinx\ dx$$

$$A = \left|-cosx\right|_{\frac{-\pi}{2}}^{0} + \left|-cosx\right|_{0}^{\pi}$$

$$A = \left|-\left(cos0 - cos\frac{-\pi}{2}\right)\right| + \left|-(cos\,\pi - cos\,0)\right|$$

$$A = |-(1-0)| + |-(-1-1)|$$

$$A = |-1| + |2|$$

$$A = 1 + 2$$

$A = 3$ وحده مساحه

سؤال: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi , \pi]$

الجواب:

اي زاويه لها cos صفر

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \;,\; \frac{3\pi}{2} \;,\; \frac{-\pi}{2} \;,\; \frac{-3\pi}{2}$$

ملاحظة: اذا الزاوية صفر تأخذ (موجب و سالب)

$$x = \frac{\pi}{2} , \frac{-\pi}{2} \in [-\pi , \pi]$$

∴ الفترات

$$\left[-\pi . \frac{-\pi}{2}\right] , \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2} , \pi\right]$$

$$A = \int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} \cos x \; dx + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \; dx$$

$$A = [\sin x]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} + [\sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$A = \left|\sin\frac{-\pi}{2} - \sin -\pi\right| + \left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{-\pi}{2}\right| + \left|\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right|$$

$$A = |-1 + 0| + |1 + 1| + |0 - 1|$$

$$A = |-1| + |-2| + |-1|$$

$$A = 1 + 2 + 1$$

$A = 4$ وحدة مساحه

سؤال: جد المساحة المحددة بالمنحنيين $f(x) = cosx - sinx$ وعلى الفتره $[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2}]$

الجواب:

$$cosx - sinx = 0$$

$$cosx = sinx \qquad \div \; cosx$$

$$1 = \frac{sinx}{cosx} \Rightarrow tan\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

اي زاوية $tan\,x$ لها $=1$

$$\therefore \; x = \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$$

$\therefore$ الفترات $\left[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{4}\right] \; \left[\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}\right],$

$$A = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (cosx - sinx)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (cosx - sinx)\,dx$$

$$A = [\,sinx + cosx\,]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + [\,sinx + cosx\,]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \left|\left(sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(sin\frac{-\pi}{2} + cos\frac{-\pi}{2}\right)\right| + \left|\left(sin\frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1 + 0)\right| + \left|(1 + 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| + \left|1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right| = \left|\sqrt{2} + 1\right| + \left|1 - \sqrt{2}\right|$$

$$A = \sqrt{2} + 1 - 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$ وحده مساحه

سؤال: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = sin3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$

الجواب:

$$sin3x = 0 \quad \rightarrow \quad 3\,x = 0\,,\pi\,,2\,\pi,-\pi\,,-2\,\pi \quad \div\ 3$$ اي زاويه sin لها صفر

$$x = 0\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{-\pi}{3}\ ,\ \frac{-2\pi}{3}$$

$$\therefore\ x = \frac{\pi}{3} \in \left[0\ ,\frac{\pi}{2}\right]$$

$\therefore$ الفترات $\left[0\ ,\frac{\pi}{3}\right]\ \left[\frac{\pi}{3}\ ,\frac{\pi}{2}\right],$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin3x\ dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sin3x\ dx$$

$$A = \left|\frac{-1}{3}cos3x\right|_0^{\frac{\pi}{3}} + \left|\frac{-1}{3}cos3x\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \left|\frac{-1}{3}\left(cos3\frac{\pi}{3} - \cos 3(0)\right)\right| + \left|\frac{-1}{3}\left(cos3\frac{\pi}{2} - cos3\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{-1}{3}(cos\pi - cos\ 0)\right| + \left|\frac{-1}{3}\left(cos\frac{3\pi}{2} - cos\ \pi\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{-1}{3}\ (-1 - 1)\right| + \left|\frac{-1}{3}\ (0 - (-1)\right|$$

$$A = \left|\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right|$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$ وحدة مساحه

سؤال: جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

الجواب:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2x) \\ &= \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\ (1 + \cos 2x)\right) - 1 \\ &= 1 + \cos 2x - 1 = \cos 2x \end{aligned}}$$

$\because\ y = 2\cos^2 x - 1$

$\therefore y = \cos 2x$ طريقة مباشره

$\cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2} , \frac{-\pi}{2} , \frac{-3\pi}{2} \qquad \div 2$

$x = \frac{\pi}{4} , \frac{3\pi}{4} , \frac{-\pi}{4} , \frac{-3\pi}{4}$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{4} \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ الفترات $[0 , \frac{\pi}{4}] , [\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}]$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$$

$$A = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \left|\frac{1}{2}\left(\sin 2\frac{\pi}{4} - \sin 2(0)\right)\right| + \left|\frac{1}{2}\left(\sin 2\frac{\pi}{2} - \sin 2\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)\right| + \left|\frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}(1 - 0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0 - 1)\right| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right|$$

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ وحدة مساحة