التكامل Integration

التكامل (أ) هو أداة رياضية قوية تُستخدم لحساب المساحات، والحجوم، والشغل، وغيرها من الكميات الفيزيائية والهندسية. وكما أن التفاضل يدرس معدلات التغير والاشتقاق، فإن التكامل يعالج العملية العكسية، حيث يبحث في تجميع الكميات وإيجاد الإجماليات . نجد التكامل في العديد من التطبيقات الواقعية، مثل حساب المساحة تحت منحنى معين، أو إيجاد الحجم الناتج عن دوران سطح حول محور، أو حتى في مجالات أوسع مثل الفيزياء والهندسة والاقتصاد والإحصاء.

يمكن تلخيص فوائد التكامل في النقاط التالية:

اولا: حساب المساحات:

يستخدم التكامل لتحديد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة ومحور السينات.

ثانيا: حساب الحجوم:

عند تدوير منحنى حول محور معين، يمكن استخدام التكامل لحساب حجم المجسم الناتج (مثل حساب حجم الكرة أو الأسطوانة).

ثالثا: حساب الأطوال والمسافات:

يُستخدم التكامل لحساب طول المنحنيات والمسافة الكلية المقطوعة بناءً على سرعة متغيرة.

رابعا: حساب الشغل والطاقة:

في الفيزياء، يُستخدم التكامل لحساب الشغل المبذول عند تطبيق قوة متغيرة على جسم.

خامسا: النمذجة الرياضية في العلوم والهندسة:

يدخل التكامل في حل المعادلات التفاضلية التي تصف الظواهر الطبيعية مثل انتشار الحرارة، وحركة السوائل، ونمو السكان.

سادسا: الاقتصاد والإحصاء:

يُستخدم التكامل لحساب إجمالي الإيرادات والتكاليف، وإيجاد التوزيعات الاحتمالية في الإحصاء.

سابعا: الإشارات والأنظمة:

في الهندسة الكهربائية، يُستخدم التكامل لتحليل الإشارات ومعالجة البيانات الرقمية.

أنواع التكامل:

اولا: التكامل غير المحدد Indefinite integral

ثانيا: التكامل المحدد definite integral

التكامل غير المحدد Indefinite integral

هو ينتج عنه دالة جديدة تمثل مجموعة من الحلول المحتملة. أي هو عملية عكسية للاشتقاق حيث نبحث عن الدالة الاصلية التي اشتقاقها يعطينا الدالة المعطى . ويميز عن المحدد بعدم وجود فترة على رمز التكامل واضافة C الى الحل.

يتم تمثيله رياضيا على النحو التالي:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

حيث ان:

f(x) هي الدالة التي نريد تكاملها.

(dx) = نكامل بالنسبة لـ x واي شي غيره يعتبر ثابت.

F(x) هي الدالة الاصلية (الدالة المقابلة للدالة f(x)).

C: ثابت التكامل: هو عدد يعبر عن جميع الحلول الممكنة لان الاشتقاق يزيل الثابت.

قواعد التكامل غير المحدد:

اولا: تكامل العدد الثابت

$$\int a\,du = au + c$$

Ex1/ $\int 2\,dx = 2x + c$

Ex2/ $\int -7\,dx = -7x + c$

Ex3/ $\int \frac{2}{3}\,dt = \frac{2}{3}t + c$

Ex4/ $\int z\,dx = z\,x + c$

ثانيا: تكامل متغير واحد (نضيف واحد للاس ونقسم على الاس الجديد)

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

Ex1/ $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$

Ex2/ $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

Ex3/ $\int x^7\,dx = \frac{1}{8}x^8 + c$

Ex4/ $\int x^{-3}\,dx = \frac{-1}{2}x^{-2} + c$

ثالثا: تكامل متغير مضروب بثابت (نستخرج الثابت خارج التكامل ونكامل بصورة طبيعة).

$$\int a\,u^n\,du = a\int u^n\,du = a * \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

Ex1/ $\int -3x^4\,dx = -3\int x^4\,dx = \frac{-3}{5}x^5 + c$

Ex2/ $\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx = x^4 + c$

Ex3/ $\int \frac{-3}{5}x^4\,dx = \frac{-3}{5}\int x^4\,dx = \frac{-3}{25}x^5 + c$

رابعا: تكامل دالة كثير حدود (نوزع التكامل على كل حد ثم نكامل بصورة طبيعة).

Ex1/ $\int x^3 + x^2 + 3\,dx$

$= \int x^3\,dx + \int x^2\,dx + \int 3\,dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x + c$

Ex2/ $\int 2t^{-4} + \frac{4}{3}t^3 + 1\,dt$

$= \int 2t^{-4}\,dt + \int \frac{4}{3}t^3\,dt + \int 1\,dt$

$= \frac{-2}{3}t^{-3} + \frac{1}{3}t^4 + t + c$

خامسا: تكامل حاصل ضرب دالتين: يجب فتح الاقواس ثم نكامل حسب القواعد السابقة.

Ex1: $\int (X+1)(X^2+2)\,dx$

$= \int X^3 + 3X + X^2 + 2\,dx$

$= \frac{1}{4}X^4 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + 2X + C$

Ex2: $\int (2X^2 - 1)(X^2)\,dx$

$= \int 2X^4 - X^2\,dx$

$= \frac{2}{5}X^5 + \frac{1}{3}X^3 + C$

Ex3: $\int (3X^3)(X^2 + 2X + 3)\,dx$

$= \int 3X^5 + 6X^4 + 9X^3\,dx$

$= \frac{3}{6}X^6 + \frac{6}{5}X^5 + \frac{3}{2}X^6 + C$

Ex4: $\int (X-1)(2X^3 - 2X + 1)\,dx$

$= \int 2X^4 - 2X^2 + X - 2X^3 + 2X - 1\,dx$

$= \int 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1\,dx$

$= \int \frac{2}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{3}{2}X^3 - X + C$

م.م. علاء المساعد