

سادسا: تكامل دالة مرفوعة الى اس:

أ- اذا كانت مشتقة داخل القوس موجودة وليس فيها نقص نحذف المشتقة ثم نضيف واحد للاس ونقسم على الاس الجديد.

$$\text{Ex1: } \int (2X - 1)^2 2dx \\ = \frac{1}{3} (2X - 1)^3 + C$$

$$\text{Ex2: } \int (3X^2 - X)^3 (6X - 1) dx \\ = \frac{1}{4} (2X - 1)^4 + C$$

$$\text{Ex3: } \int 3(X^4 - 3X)^7 (4X^3 - 3) dx \\ = 3 \int (X^4 - 3X)^7 (4X^3 - 3) dx \\ = \frac{3}{8} (X^4 - 3X)^8 + C$$

$$\text{Ex4: } \int (X^3 - 2X^2)^{3/2} (3X^2 - 4X) dx \\ = \frac{2}{5} (X^4 - 3X)^{5/2} + C$$

$$\text{Ex5: } \int (X^2 - 4X)^{-5} (2X - 4) dx \\ = \frac{-1}{4} (X^4 - 3X)^{-4} + C \\ = \frac{-1}{4} * \frac{1}{(X^4 - 3X)^4} + C$$

ب- اذا كانت مشتقة داخل القوس موجودة ولكن فيها نقص عدد نسدد النقص ونقلبه خارج التكامل ثم نحذف المشتقة ونضيف واحد للاس ونقسم على الاس الجديد

$$\begin{aligned}\text{Ex1: } & \int (X^4 + 2)^2 X^3 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (X^4 + 2)^2 4X dx \\ &= \frac{1}{4} * \frac{1}{3} (X^4 + 2)^3 + C \\ &= \frac{1}{12} (X^4 + 2)^3 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ex2: } & \int (3X^2 - 6X)^3 (X - 1) dx \\ &= \frac{1}{6} \int (3X^2 - 6X)^3 6(X - 1) dx \\ &= \frac{1}{6} * \frac{1}{4} (3X^2 - 6X)^4 + C \\ &= \frac{1}{24} (3X^2 - 6X)^4 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ex3: } & \int (X^2 + 2X)^{-5} (X + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int (X^2 + 2X)^{-5} 2(X + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} * \frac{-1}{4} (X^2 + 2X)^{-4} + C \\ &= \frac{-1}{8} (X^2 + X)^{-4} + C\end{aligned}$$

$$\text{Ex4: } \int (X^5 + 5)^{5/2} X^4 dx$$

$$= \frac{1}{5} \int (X^5 + 5)^{5/2} 5X^4 dx$$

$$= \frac{1}{5} * \frac{2}{7} (X^5 + 5)^{7/2} 5X^4 dx$$

$$= \frac{2}{35} (X^5 + 5)^{7/2} + C$$

$$\text{Ex5: } \int (4X^3 + 12X)^{-1/2} (6X^2 + 6) dx$$

$$= \frac{1}{5} \int (4X^3 + 12X)^{-1/2} 2(6X^2 + 6) dx$$

$$= \frac{1}{5} * 2 (X^5 + 5)^{1/2}$$

$$= \frac{2}{5} (X^5 + 5)^{1/2} + C$$

$$\text{Ex6: } \int (X^3 + 3X + 3)^{-7/2} (X^2 + 3) dx$$

$$= \frac{1}{3} \int (X^3 + 3X + 3)^{-7/2} 3(X^2 + 3) dx$$

$$= \frac{1}{3} * \frac{-2}{5} (X^3 + 3X + 3)^{-5/2} + C$$

$$= \frac{-2}{15} (X^3 + 3X + 3)^{-5/2} + C$$

ج- ذا كانت مشتقة داخل القوس غير موجودة ولا يمكن توفيرها ( نستخدم طرق التحليل )

$$\begin{aligned}\text{Ex1: } & \int (X^2 + 5)^2 dx \\ & = \int X^4 + 10X^2 + 25 dx \\ & = \frac{1}{5} X^5 + \frac{10}{3} X^3 + 25X + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ex2: } & \int (X^2 + 2)^3 dx \\ & = \int (X^2 + 2)^2 (X^2 + 2) dx \\ & = \int (X^4 + 4X + 4) (X^2 + 2) dx \\ & = \int (X^6 + 4X^3 + 4X^2 + 2X^4 + 8X + 8) dx \\ & = \frac{1}{7} X^7 + X^4 + \frac{4}{3} X^3 + \frac{2}{5} X^5 + 4X^2 + 8X + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ex3: } & \int (X - 1)^{1/2} (2x-2) dx \\ & = \int (X - 1)^{1/2} 2(x-1) dx \\ & = \int 2(X - 1)^{3/2} dx \\ & = 2 * \frac{2}{5} (X - 1)^{5/2} + C \\ & = \frac{4}{5} (X - 1)^{5/2} + C\end{aligned}$$

سابعاً: تكامل قسمة دالتين: نقسم كل حد في البسط على المقام او نبحت عن طرق التحليل لغرض حذف المقام ثم نكامل حسب القواعد السابقة:

$$\begin{aligned}\text{Ex1: } \int \frac{x^3 - 8x^2 + 3x}{x} dx \\ &= \int \frac{x^3}{x} - \frac{8x^2}{x} + \frac{x}{x} dx \\ &= \int x^2 + 8x + 1 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + 4x^2 + x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ex2: } \int \frac{x^3 - 8}{x - 2} dx \\ &= \int \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} dx \\ &= \int (x^2 + 2x + 4) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x + c \\ &= \frac{1}{3} x^3 + x^2 + 4x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ex3: } \int \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} dx \\ &= \int \frac{(x-5)(x+2)}{x-5} dx \\ &= \int x + 2 dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 2x + c\end{aligned}$$

$$\text{Ex4: } \int \frac{4x^3+1}{(2x^4+2x)^2} dx$$

$$= \int (2x^4 + 2x)^{-2} (4x^3 + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (2x^4 + 2x)^{-2} (8x^3 + 2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2x^4 + 2x)^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{2(2x^4 + 2x)} + c$$

$$\text{Ex5: } \int \frac{1}{x^2-10x+25} dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-5)^2} dx$$

$$= \int (x-5)^{-2} dx$$

$$= \frac{(x-5)^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{x-5} + c$$

ملاحظة: اذا جاء في السؤال جذر نحول الجذر الى الصيغة الاسية (بشرط مشتقة تحت الجذر تكون متوفرة خارجه) ليكون الحل عن طريق دالة الدالة

$$\text{Ex: } \int \sqrt{x^2 + x + 1} (2x + 1) dx$$

$$= \int (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}} (2x + 1) dx$$

$$= \frac{(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)^3} + c$$

ملاحظة: اذا كانت الدالة جذر (ولم نجد مشتقة تحت الجذر) يجب ان نبحث عن المربع الكامل ثم نحوله الى صيغة اسية او نبحث عن العامل المشترك ليستخرج من تحت الجذر ليكون مشتقته ثم نكامل كما سبق

$$\text{Ex: } \int \sqrt{x^2 - 4x + 4} dx$$

$$= \int \sqrt{(x - 2)^2} dx$$

$$= \int (x - 2) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + c .$$

$$\text{Ex: } \int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5} dx$$

$$= \int \sqrt[3]{x^3(3 - 5x^2)} dx$$

$$= \int x (3 - 5x^2)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= -\frac{1}{10} \int (-10x)(3 - 5x^2)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= -\frac{3}{40} \sqrt[3]{(3 - 5x^2)^4} + c$$

$$\text{Ex: } \int \sqrt{x^4 - x^2} dx$$

$$= \int \sqrt{x^2(x^2 - 1)} dx$$

$$= \int x (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{6} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^3} + c$$

واجبات:

$$1) \int \sqrt{x^2 + 14x + 49} dx$$

$$2) \int \sqrt{x^4 - x^2} dx$$

$$3) \int \sqrt[5]{5x^5 - 7x^7} dx$$

$$4) \int \frac{x}{x^4 - 8x^2 + 16} dx$$

$$5) \int \frac{x+3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1} dx$$