الفضاء المتري
Metric space

الفضاء المتري (X, d) هو زوج مرتب من مجموعة غير خالية X مع دالة حقيقية d معرفة على $X \times X$ ولكل $x, y, z \in X$ تحقق البديهيات التالية:

١. $d(x,y) \geq 0$.

٢. $d(x,y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

٣. $d(x,y) = d(y,x)$ (بديهية التناظر).

٤. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (المتراجحة المثلثية).

م/ الدالة d تدعى بالدالة المترية (metric function)

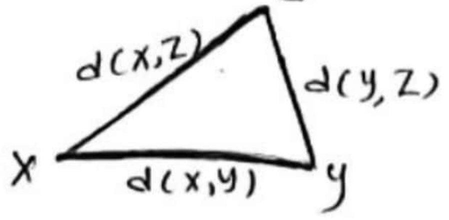
ملاحظات

أ. أن البديهية الأولى $d(x,y) \geq 0$ تعني أن المسافة بين نقطتين لا يمكن أن تكون سالبة.

ب. البديهية الثانية تعني أن المسافة من نقطة إلى نفسها تساوي صفر.

جـ. البديهية الثالثة (بديهية التناظر) تعني أن المسافة من x إلى y هي المسافة نفسها من y إلى x.

د. البديهية الرابعة تدعى بالمتراجحة المثلثية لأنه إذا كانت x, y, z نقاط في مستوي تؤلف رؤوس مثلث فإن مجموع طولي أي ضلعين في مثلث هو أكبر من الضلع الثالث، كما في الشكل.



مثال ①: لتكن $X = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية والدالة d معرفة بالصيغة $d(x,y) = |x-y|$ لكل عددين حقيقيين $x, y \in R$ عندئذٍ (R, d) تؤلف فضاء متري لأنه يحقق البديهيات الأربعة وكما يلي :

① $d(x,y) = |x-y| \geq 0$ (لأنها قيمة مطلقة)

② $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\therefore d(x,y) = 0$ iff $x = y$

③ $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |-1| \cdot |y-x| = |y-x| = d(y,x)$

$\therefore d(x,y) = d(y,x)$

④ $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y|$ أضافة وطرح z

$\leq |x-z| + |z-y|$ من خواص القيمة المطلقة

$= d(x,z) + d(z,y)$

$\therefore d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

ملاحظة :- يدعى الفضاء المتري (R,d) في المثال أعلاه بالفضاء المتري الاعتيادي .

مثال ②: لتكن $X = R^n$ حيث R^n الفضاء الأقليدي الاعتيادي الذي بعده n ، لكل $x \in R^n$ فإن $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث x_i أعداد حقيقية ($1 \leq i \leq n$) ، والدالة d تعرف كما يأتي

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

لكل $x, y \in R^n$

(R^n, d) فضاء متري لأنه يحقق البديهيات الأربعة للفضاء المتري .

البرهان

1. $(x_i - y_i)^2 \geq 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\Rightarrow d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in R^n$$

2. let, $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots n$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\therefore d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$

3. $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}(-(y_i - x_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^2(y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(y,x)$$

$$\therefore d(x,y) = d(y,x)$$

4. let $X, Y, Z \in R^n$

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n),\ Z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$$

and let

$$x_i - z_i = a_i \ , \ z_i - y_i = b_i$$

$$\Longrightarrow x_i - y_i = a_i + b_i \qquad \forall \ (1 \leq i \leq n)$$

Now

$$d(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

الآن من متباينة مينكوفسكي (Minkowski) والتي تنص على :

لكل $a, b \in R^n$ فإن

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore d(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(X, Z) + d(Z, Y)$$

$$\therefore d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$$

مثال③: لتكن d دالة مترية معرفة على مجموعة غير خالية X عندئذٍ الدالة d^* المعرفة وفق القاعدة الآتية:

$$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

حيث $x, y \in X$ هي مترية على X ايضاً"

البرهان

① بما أن $d(x,y)$ دالة مترية $\Leftarrow d(x,y) \geq 0$

وايضاً" $1 + d(x,y) > 0$

$$\therefore \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0 \Rightarrow d^*(x,y) \geq 0$$

2. let $d^*(x,y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$

$\Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (لأن d دالة مترية)

$\therefore d^*(x,y) = 0$ iff $x = y$

3. $d^*(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

$\because$ d دالة مترية

$\therefore d(x,y) = d(y,x)$

$= \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d^*(y,x)$

$\therefore d^*(x,y) = d^*(y,x)$

٤. ليكن $x, y, z \in X$ عندئذٍ

$$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

$\because$ d دالة مترية $\therefore d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$\leq \frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)}$$

$$= \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)}$$

$$\leq \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)}$$

$$= d^*(x,z) + d^*(z,y)$$

$$\therefore d^*(x,y) \leq d^*(x,z) + d^*(z,y)$$

H.W. :- لتكن $X = C[0,1]$ مجموعة كل الدوال المستمرة على الفترة المغلقة $[0,1]$ ولتكن d دالة معرفة على X كما يلي :

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \qquad \forall\ f, g \in X$$

هل أن d دالة مترية على X

أو هل أن (X, d) فضاء متري.