المجموعات المفتوحة والمغلقة (Open and closed sets)

قبل البدء بتعريفنا للمجموعات المفتوحة في الفضاءات المترية، علينا أن نعرف الكرة المفتوحة أو الجوار المفتوح مع ذكر بعض الأمثلة

تعريف:- ليكن (X,d) فضاء متري وليكن x عنصراً ما من X و δ عدد موجب. نعرف الكرة المفتوحة التي مركزها x ونصف قطرها δ ويرمز لها بالرمز $S(x,\delta)$ بأنها مجموعة كل النقاط التي تبعد عن x مسافة أقل من δ أي أن

$$S(x,\delta)=\{y\in X : d(x,y)<\delta\}$$

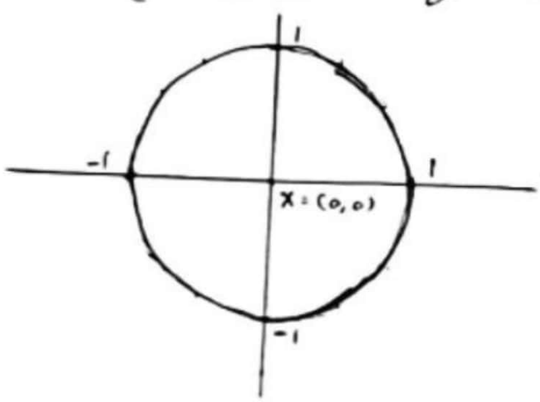
وتدعى أحياناً بالجوار المفتوح للعنصر x وبقدر δ.

مثال: ليكن d الدالة المترية الاعتيادية على R، أي أن

$$d(x,y)=|x-y| \quad \forall\ x,y\in R$$

عندئذ الكرة المفتوحة $S(x,\delta)$ هي الفترة المفتوحة $(x-\delta, x+\delta)$

مثال: ليكن d الدالة المترية الاعتيادية على R^2 ولتكن $x=(0,0)$ نقطة الأصل في R^2 والعدد الحقيقي $\delta=1$ عندئذ الكرة المفتوحة $S(x,\delta)$ هي القرص الواحدي المفتوح. وكما هو مبين في الشكل:



مبرهنة: أن المجموعة الخالية ϕ والمجموعة الشاملة X مفتوحتان في أي فضاء متري (X, d).

البرهان: أن المجموعة الخالية ϕ مفتوحة لأنه لكل $x \in \phi$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $S(x, \delta) \subseteq \phi$

كما أن المجموعة الشاملة X مفتوحة لأن أي جوار لأي نقطة $x \in X$ محتواة في X.

مبرهنة: ليكن (X, d) فضاء متري. عندئذٍ

١- اتحاد عائلة من مجموعات مفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

٢- تقاطع مجموعتين مفتوحتين يكون مجموعة مفتوحة.

البرهان: ١- ليكن $\{O_\lambda\}_\lambda$ عائلة من مجموعات مفتوحة

سوف نثبت أن $\bigcup_\lambda O_\lambda$ مجموعة مفتوحة

الحالة الأولى:- إذا كانت العائلة مجموعات خالية فإن اتحادها تكون مجموعة خالية وبذلك تكون مفتوحة

الحالة الثانية:- نفرض أن $\{O_\lambda\}$ مجموعات غير خالية

وليكن $x \in \bigcup_\lambda O_\lambda \Rightarrow x \in O_\lambda$ لبعض λ

وبما أن O_λ مجموعة مفتوحة، يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أن $S(x, \delta) \subseteq O_\lambda$

وهذا يعني أن $S(x, \delta) \subset \bigcup_\lambda O_\lambda$

وبذلك تكون اتحاد عائلة من مجموعات مفتوحة، مفتوحة أيضاً

٢- نفرض أن O_1 ، O_2 مجموعتان مفتوحتان غير خاليتين

إذا كان $O_1 \cap O_2 = O$ مجموعة خالية فإن O مفتوحة.

الآن نفرض أن O مجموعة غير خالية أي أن تقاطع المجموعتين غير خالي

نفرض أن $x \in O$ عليه فإن

$$x \in O_1 \,,\quad x \in O_2$$

الآن $x \in O_1$ يعني أنه يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث أن

$$S(x,\delta_1) \subseteq O_1$$

وبالمثل $x \in O_2$ يعني أنه يوجد $\delta_2 > 0$ بحيث أن

$$S(x,\delta_2) \subseteq O_2$$

وإذا فرضنا δ أصغر العددين δ_1 و δ_2 فإن

$$S(x,\delta) \subseteq S(x,\delta_i) \quad \forall\ i=1,2$$

وبذلك يكون

$$S(x,\delta) \subseteq O$$

أي أن O مجموعة مفتوحة وبهذا يتم البرهان.

تعريف :- ليكن (X, d) فضاء متري و A مجموعة جزئية من X ، يقال عن النقطة x التي تنتمي الى X أنها نقطة غاية (نهاية) (limit point) للمجموعة A إذا كان تقاطع كل كرة مفتوحة $S(x, \delta)$ مركزها x مع A بنقطة واحدة في الأقل تختلف عن x أي أن

$$A \cap S(x, \delta) - \{x\} \neq \phi$$

نرمز لمجموعة كل نقاط غاية المجموعة A بالرمز $d(A)$ وتسمى بالمجموعة المشتقة (derived set) أي أن

$$d(A) = \{x : A \text{ نقطة غاية للمجموعة } x\}$$

مثال :- ليكن d الدالة المترية الاعتيادية على مجموعة الأعداد الحقيقية R ، عندئذٍ العدد (0) يمثل نقطة غاية للمجموعة

$$A = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots\}$$

لاحظ أن العدد (0) لا ينتمي الى المجموعة A.
كذلك فأن (0) يمثل نقطة غاية للمجموعة A.

تعريف :- ليكن (X, d) فضاء متري ، ولتكن F مجموعة جزئية من X. يقال عن F انها مجموعة مغلقة (closed set) إذا احتوت F على جميع نقاط غايتها .

ملاحظة :- ان المجموعة A في المثال السابق ليست مغلقة لأن (0) هي نقطة غاية وان $0 \notin A$.

ملاحظة :- أن أي فترة مغلقة في الفضاء المتري الاعتيادي هي مجموعة مغلقة .

مبرهنة :- تكون المجموعة الجزئية في فضاء متري مغلقة إذا وفقط إذا كانت متممتها مفتوحة (بدون برهان)

نتيجة :- تكون المجموعات الجزئية في فضاء متري مفتوحة إذا وفقط إذا كانت متممتها مغلقة

مبرهنة :- أن المجموعة الشاملة X والمجموعة الخالية $\emptyset$ مغلقتان في أي فضاء متري (X, d).

البرهان: بما أن $\emptyset = X^c$ وأن $X = \emptyset^c$

وأن $\emptyset$ ، X مجموعتان مفتوحتان (حسب مبرهنة سابقة)

فإن X ، $\emptyset$ مجموعتان مغلقتان.

#