Topological space الفضاء التبولوجي

لتكن X مجموعة غير خالية من نقاط و τ عائلة من مجموعات جزئية من X . يقال أن τ تبولوجيا على X أو أن (X, τ) فضاءً تبولوجياً إذا وفقط إذا تحققت البديهيات الآتية

i) $\phi, X \in \tau$

ii) $\bigcup_{\lambda} E_{\lambda} \in \tau \quad . \quad \forall E_{\lambda} \in \tau$

iii) $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \tau \quad \forall E_i \in \tau \quad , \quad 1 \leq i \leq n$

ملاحظة: البديهية الثانية تعني أن τ مغلقة بالنسبة إلى اتحاد أي عدد من المجموعات والبديهية الثالثة تعني أن τ مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي.

* تدعى عناصر τ بالمجموعات المفتوحة (open sets) للفضاء التبولوجي

مثال ١) لتكن $X \neq \phi$ ، $\tau = \{\phi, X\}$ عندئذٍ τ تبولوجيا على X لأنها تحقق البديهيات الثلاثة أعلاه وتدعى هذه التبولوجيا بالتبولوجيا الضعيفة على X

مثال ٢) لتكن $X \neq \phi$ و τ عائلة كل المجموعات الجزئية من X عندئذٍ τ تبولوجيا على X لأن:

$\phi \subseteq X \Rightarrow \phi \in \tau$

$X \subseteq X \Rightarrow X \in \tau$

وأن اتحاد مجموعات جزئية من X هي مجموعة جزئية من X.
كذلك أن تقاطع مجموعات جزئية من X هي مجموعات جزئية من X

* تدعى التبولوجيا في (المثال ٢) بالتبولوجيا المبعثرة على X

مثال ٣ : ليكن $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},X\}$

عندئذٍ τ تبولوجيا على X لأن

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) $\{a\}\cup\{b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

$\{b,c\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

$\{a\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

iii) $\{a\}\cap\{b,c\}=\emptyset\in\tau$

$\{a\}\cap\{a,b,c\}=\{a\}\in\tau$

$\{b,c\}\cap\{a,b,c\}=\{b,c\}\in\tau$

مثال ٤ : ليكن $X=\{a,b,c\}$ والعائلة $\psi=\{\emptyset,\{a\},\{b\},X\}$

عندئذٍ ψ ليست تبولوجيا على X لأن

$\{a\},\{b\}\in\psi$

في حين $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin\psi$

* إذا أضفنا العنصر $\{a,b\}$ إلى عناصر ψ فإن العائلة الناتجة تكون تبولوجيا على X .

مثال ٥ : لتكن $X = N$ مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن τ عائلة تتألف من $\emptyset$ و X وكل المجموعات الجزئية ذات الصيغة $\{1,2,\dots,n\}$ عندئذٍ τ تبولوجيا على X لأن

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) let $\{1,2,\dots,n_1\}, \{1,2,\dots,n_2\} \in \tau$

$$\{1,2,\dots,n_1\} \cup \{1,2,\dots,n_2\} = \begin{cases} \{1,2,\dots,n_1\} & \text{if } n_1 \geq n_2 \\ \{1,2,\dots,n_2\} & \text{if } n_2 \geq n_1 \end{cases}$$

وفي كلا الحالتين نستنتج أن الاتحاد ينتمي لـ τ ، أي أن البديهية الثانية متحققة

وبالطريقة نفسها ، يمكن أثبات اتحاد أي عدد غير منتهي من المجموعات المفتوحة في τ هو عنصر ينتمي لـ τ.

$$\cup \{1,2,\dots,n_\lambda\} = \{1,2,\dots,n_0\}$$

حيث أن $n_0 = \max_{\lambda} n_\lambda$

iii) $$\{1,2,\dots,n_1\} \cap \{1,2,\dots,n_2\} = \begin{cases} \{1,2,\dots,n_1\} & \text{if } n_1 \leq n_2 \\ \{1,2,\dots,n_2\} & \text{if } n_2 \leq n_1 \end{cases}$$

وفي كلا الحالتين نستنتج أن البديهية الثالثة تحققت

وبالطريقة نفسها يمكن اثبات تقاطع أي عدد منتهي من المجموعات المفتوحة في τ هو عنصر ينتمي لـ τ.

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{1,2,\dots,n_i\} = \{1,2,\dots,n_0\}$$

حيث أن $n_0 = \min_{1 \leq i \leq m} n_i$

[redacted]

H.w. : لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$,

$$\tau = \{\phi, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$$

[redacted] هل أن (X, τ) فضاءً تبولوجيا ؟