المتتابعات (The Sequence)

إن المتتابعة بصورة عامة هي دالة منطلقها مجموعة الأعداد الطبيعية ومداها إما مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة الأعداد المعقدة أو عناصر في فضاء معين.

ويرمز للمتتابعة عادة بالرمز (X_n)، حيث X_n اما عدد حقيقي أو معقد أو عنصر من عناصر الفضاء قيد الدراسة.

مثال:- أن كل مما يأتي متتابعة

$$(1) = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$$

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right).$$

$$\left(\frac{i}{n}\right) = \left(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \frac{i}{4}, \dots\right).$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right).$$

تعريف:- ليكن (X, d) فضاء متري ولتكن $(X_n) = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ متتابعة من نقاط في X، يقال أن (X_n) متتابعة متقاربة في X إذا وجد نقطة x في X تحقق احد الشرطين

١- لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن $d(X_n, X) < \epsilon$ عندما $n \geq N$ وهذا يكافئ:

٢- لكل كرة مفتوحة $S(x, \epsilon)$ مركزها x، يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن $X_n \in S(x, \epsilon)$ لكل $n \geq N$.

مبرهنة :- في الفضاءات المترية تكون غاية المتتابعة وحيدة.

البرهان :- ليكن (X,d) فضاء متري وليكن (x_n) متتابعة متقاربة في X

نفرض أن للمتتابعة (x_n) غايتين مختلفتين x, y "مثلاً"

وأن $2\epsilon = d(x,y)$

الآن $x_n \to x$ وهذا يعني وجود عدد صحيح موجب N_1 بحيث

$$d(x_n, x) < \epsilon \qquad \forall \; n > N_1$$

وكذلك $x_n \to y$ وهذا يعني وجود عدد صحيح موجب N_2 بحيث

$$d(x_n, y) < \epsilon \qquad \forall \; n > N_2$$

الآن ليكن N أكبر العددين N_1, N_2 عندئذٍ نحصل على

$$2\epsilon = d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

$$< \epsilon + \epsilon$$

$$< 2\epsilon = 2\epsilon$$

وهذا تناقض

∴ غاية المتتابعة المتقاربة وحيدة.

<u>تعريف</u>:- ليكن (X,d) فضاء متري و (X_n) متتابعة في X ، تسمى (X_n) متتابعة كوشية إذا كان لكل $\epsilon>0$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$d(X_n, X_m) < \epsilon \qquad \forall \; m,n > N$$

<u>مبرهنة</u>:- كل متتابعة متقاربة هي متتابعة كوشية.

<u>البرهان</u>:- لتكن X_n متتابعة متقاربة وأن نقطة تقاربها X

$\therefore X_n \to X$

$\therefore$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$d(X_n, X) < \epsilon/2 \qquad \forall \; n > N$$

الآن

$$\begin{aligned} d(X_n, X_m) &\leq d(X_n, X) + d(X_m, X) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &< \epsilon \qquad \forall \; n,m > N \end{aligned}$$

$\therefore$ المتتابعة (X_n) تكون كوشية

ملاحظة:- أن عكس المبرهنة اعلاه غير صحيح وكما في المثال التالي

مثال:- لتكن $X = (0,1]$ مجموعة جزئية من R ، ولتكن d الدالة المترية الاعتيادية عندئذ المتتابعة (X_n) بحيث أن $X_n = \frac{1}{n}$ تحقق خاصية كوشي ولكنها ليست متقاربة في X ، لأن غايتها (0) ولا تنتمي الى X .

تعريف :- يقال أن (X,d) فضاء متري كامل Complete metric space ، إذا كانت كل متتابعة كوشية فيه متقاربة .