بديهيات الأنغلاق: (Closure Axioms)

١- $\bar{\phi} = \phi$ ، $X = \bar{X}$.

٢- $\bar{E}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحتوي على E.

٣- $E = \bar{E}$ إذا وفقط إذا كانت E مغلقة.

٤- $\bar{E} = \bar{\bar{E}}$

٥. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

برهان (٥)

$$\overline{(A \cup B)} = (A \cup B) \cup d(A \cup B)$$
$$= (A \cup B) \cup (d(A) \cup d(B))$$
$$= (A \cup d(A)) \cup (B \cup d(B))$$
$$= \bar{A} \cup \bar{B}$$

ملاحظة :- أن البديهية (٥) لا تصح إذا ابدلنا الأتحاد بالتقاطع كما في المثال الأتي:

مثال :- أعط مثالاً يبين ان $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$

نفرض أن $X = \{a, b, c, d, e\}$ و

$$\tau = \{\phi, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, X\}$$

$A = \{a, b, d\}$ ، $B = \{c, d\}$

$A \cap B = \{d\}$

الأن: المجاميع المغلقة في الفضاء التبولوجي هي

$X, \{b, c, d, e\}, \{a, d, e\}, \{d, e\}, \{e\}, \phi$

$\bar{A} = X$ ، $\bar{B} = \{b, c, d, e\}$ ، $\overline{A \cap B} = \{d, e\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{b, c, d, e\} \longrightarrow \overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$

مبرهنة :- إذا كانت E مجموعة جزئية في فضاء تبولوجي (X, T)
وإذا كانت

$$d(F) \subseteq E \subset F \quad \text{-----} (1)$$

لمجموعة جزئية $F \subset X$ فأثبت أن E مجموعة مغلقة.

البرهان :

بما أن $E \subset F$

فإن $d(E) \subset d(F)$

الآن من المعادلة (١) نحصل على

$d(E) \subseteq d(F) \subseteq E$

أي أن E مجموعة مغلقة

دواخل المجموعات : (Interiors of Sets)

ليكن (X, τ) فضاء "تبولوجيا" ولتكن $E \subset X$ يعرف داخل المجموعة E ، ويرمز له بالرمز E° بانه اتحاد كل المجموعات المفتوحة المحتواة في E . أي أن

$$E^\circ = \bigcup_i G_i$$

حيث $G_i , i \in I$ مجاميع مفتوحة جزئية من E

مثال : ليكن

$X = \{a, b, c, d, e\}$ و

$$\tau = \{\phi, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$$

ولتكن $A = \{a, b, e\}$ جد A°

الحل :-

$$A^\circ = \phi \cup \{a\} = \{a\}$$

لاحظ أن

$$X^\circ = X \quad , \quad \phi^\circ = \phi$$

H.W. B° when $B = \{a, c, d\}$

ملاحظة :- يمكن ايجاد داخل المجموعة إذا علم انغلاق المجموعات وبالعكس وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة :- لكل مجموعة E في فضاء تبولوجي (X, τ) يكون

$$E^{\circ} = \overline{E^{c}}^{\,c}$$

البرهان: الاتجاه الأول

نفرض أن $x \in E^{\circ}$ ، عندئذ E° مجموعة مفتوحة منفصلة عن E^{c} أي أن

$$E^{\circ} \cap E^{c} = \phi$$

أي أن

$$E^{\circ} \cap E^{c} - \{x\} = \phi$$

أي أن

$$x \notin d(E^{c})$$

كذلك $x \notin E^{c}$ لأن $x \in E^{\circ}$

إذن

$$x \notin E^{c} \cup d(E^{c})$$

عليه فإن

$$x \notin \overline{E^{c}}$$

$$\therefore \; x \in \overline{E^{c}}^{\,c}$$

وبذلك يكون قد اثبتنا أن

$$E^{\circ} \subseteq \overline{E^{c}}^{\,c} \quad \ldots\ldots (1)$$

الاتجاه الثاني

نفرض أن $x \in \overline{E^{c}}^{\,c}$

$$\Rightarrow x \notin \overline{E^{c}}$$

أي أن

$$x \notin E^c \cup d(E^c)$$

وعليه تكون

$$x \notin E^c \;,\; x \notin d(E^c)$$

الآن $x \notin d(E^c)$ يعني توجد مجموعة مفتوحة G

بحيث أن

$$x \in G$$

$$G \cap E^c - \{x\} = \phi$$

عليه يكون $G \cap E^c = \phi$ ، لأن $x \in E^c$ ومنها نستنتج

أن $G \subset E$. أي أننا حصلنا على أن

$$x \in G \subseteq E$$

لمجموعة مفتوحة G وعليه x تنتمي الى اتحاد كل المجموعات

المفتوحة المحتواة في E وهو E° لذا فإن

$$E^{c^{-c}} \subseteq E^{\circ} \quad \ldots (2)$$

من (1) و (2) نحصل على

$$E^{\circ} = E^{c^{-c}}$$

#

٣/ من المبرهنة السابقة نستنتج أن

$$\bar{E} = E^{c^{\circ c}}$$

الاثبات H.W.