بديهيات الداخل (Interior Axioms)

١- $X^{\circ} = X$

٢- E° هي اكبر مجموعة مفتوحة جزئية من E

٣- $E^{\circ} \subset E$

٤- $E^{\circ\circ} = E^{\circ}$

٥- $$(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$$

برهان (٥)

$$(A \cap B)^{\circ} = (A \cap B)^{c\,-\,c} = \overline{(A^{c} \cup B^{c})}^{\,c}$$

$$= (\bar{A}^{c} \cup \bar{B}^{c})^{c}$$

$$= A^{c\,-\,c} \cap B^{c\,-\,c}$$

$$= A^{\circ} \cap B^{\circ}$$

س/ أن البديهية (٥) لا تصح إذا ابدلنا التقاطع بالأتحاد

البرهان H.w.

خارج المجموعة (Exterior of a set)

ليكن (X, τ) فضاءاً تبولوجياً وليكن $E \subseteq X$ ، نعرف خارج المجموعة E ونرمز له بـ E^e ، بأنه مجموعة كل النقاط الداخلية لمتممتها . أي أن

$$E^e = E^{c^\circ}$$

يمكن استنتاج البديهيات التالية من بديهيات الداخل وتعريف خارج المجموعة.

بديهيات الخارج (Exterior Axioms)

١- $\emptyset^e = X$

٢- $E^e \subseteq E^c$

٣- $E^e = E^{e^{c^e}}$

٤- $(A \cup B)^e = A^e \cap B^e$

برهان البديهية الرابعة (H.W.)

جبهة المجموعة (Boundary of a set)

ليكن (X,T) فضاء تبولوجي ، ولتكن $E \subseteq X$ نعرف جبهة المجموعة E ونرمز لها بالرمز $b(E)$. بانها مجموعة كل النقاط غير الداخلية للمجموعة E أو للمجموعة E^c . أي أن

$$b(E) = (E^\circ \cup E^{c\circ})^c$$

حسب قانون دي مورگان

$$b(E) = E^{\circ c} \cap E^{c\circ c}$$

$$= \overline{E^c} \cap \overline{E}$$

$$= \overline{E} \cap E^{\circ c}$$

$$= E \setminus E^\circ$$

مثال: لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$T = \{\phi, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,d,e\}\}$$

ولتكن $A = \{c, d\}$ جد $b(A)$

$$A^\circ = \phi$$

$$A^e = A^{c\circ} = \{a, b, d\}^\circ = \phi \cup \{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\}$$

$$b(A) = (A^\circ \cup A^{c\circ})^c = \{\phi \cup \{a,b\}\}^c = \{a,b\}^c = \{c,d,e\}$$

H.w. $d(A)$

تبولوجيا أنعم تبولوجيا أخشن

ليكن كل من τ_1 , τ_2 تبولوجي على مجموعة غير خالية X ، إذا كانت كل مجموعة جزئية من X مفتوحة بالنسبة لـ τ_1 هي ايضاً مفتوحة بالنسبة لـ τ_2. أي أن τ_1 عائلة جزئية من τ_2 ($\tau_1 \subset \tau_2$) عندئذٍ نقول عن τ_1 أنعم أو اصغر من τ_2 أو يقال أن τ_2 أخشن أو اكبر من τ_1.

ويقال عن تبولوجيتين على X انهما غير قابلتين للمقارنة no comparable إذا لم يكن منهم أنعم أو أخشن من الآخر. أي أن $\tau_1 \not\leq \tau_2$ و $\tau_2 \not\leq \tau_1$

مثال: ليكن X مجموعة غير خالية، عندئذٍ التبولوجيا المبعثرة على X هي أخشن من كل التبولوجيات على X.
كما أن التبولوجيا الضعيفة هي أنعم من كل التبولوجيات على X

مثال: لتكن

$$X = \{a, b, c, d\}$$

و

$$\tau_1 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, X\}$$

و

$$\tau_2 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$$

و

$$\tau_3 = \{\phi, \{b\}, X\} \quad \text{و} \quad \tau_4 = \{\phi, \{a\}, X\}$$

عندئذٍ

$$\tau_3 \leq \tau_2 \leq \tau_1$$

و $\tau_4 \not\leq \tau_3$ وكذلك $\tau_3 \not\leq \tau_4$

مبرهنة : في الفضاءات التبولوجية ، تكون نقاط غاية مجموعة بالنسبة الى التبولوجيا الأخشن هي ايضاً نقاط غاية للمجموعة نفسها بالنسبة الى التبولوجيا الأنعم

البرهان: نفرض أن (X, τ_1) و (X, τ_2) فضائين تبولوجيين بحيث أن
$\tau_1 \leq \tau_2$ ولتكن $A \subset X$.

سوف نثبت أن كل نقاط غاية المجموعة A في الفضاء التبولوجي τ_2 هي نقاط غاية مجموعة A نفسها في الفضاء التبولوجي τ_1.

ليكن x نقطة غاية للمجموعة A في الفضاء التبولوجي τ_2 أي أن

$$G \cap A - \{x\} \neq \emptyset$$

لكل مجموعة G مفتوحة في τ_2 و $x \in G$

لكن $\tau_1 \leq \tau_2$. عليه يكون

$$G \cap A - \{x\} \neq \emptyset$$

لكل $G \in \tau_1$ بحيث أن $x \in G$ ، أي أن x هي نقطة غاية للمجموعة A في الفضاء التبولوجي τ_1