مبرهنة ١- لتكن $X \neq \phi$ و τ تتألف من المجموعة الخالية ϕ والمجموعات الجزئية من X التي تكون متمماتها بالنسبة إلى X منتهية، عندئذٍ τ تبولوجيا على X

البرهان:-

i- $\phi \in \tau$ حسب تعريف τ وبما أن $X^c=\phi$ وأن ϕ منتهية فإن $X \in \tau$

ii- ليكن $G_\lambda \in \tau$ لكل λ، عندئذٍ تكون G_λ^c منتهية والآن من قانون دي موركان نحصل على

$$\left(\bigcup_\lambda G_\lambda\right)^c = \bigcap_\lambda G_\lambda \qquad , \forall \lambda$$

لذا فأن $\bigcap_\lambda G_\lambda^c$ مجموعة منتهية وعليه $\bigcup_\lambda G_\lambda \in \tau$

iii- ليكن $G_i \in \tau$ $(1 \leq i \leq n)$ عندئذٍ G_i^c مجموعة منتهية لكل $i=1,2,\dots,n$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} G_i^c$$

مجموعة منتهية ومنها نستنتج أن $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

مبرهنة:- تقاطع عائلة من التبولوجيات على مجموعة يكون تبولوجيا على المجموعة نفسها

البرهان:-

نفرض أن $\{\tau_i : i \in I\}$ عائلة من التبولوجيات على X سوف نثبت أن $\bigcap_i \tau_i$ هي تبولوجيا على X .

i- بما أن $\phi, X \in \tau_i$ لكل $i \in I$، لأن τ_i تبولوجيا لكل i فإن $\phi, X \in \bigcap_i \tau_i$

ii- نفرض أن لكل $i \in I$ ، $G_\lambda \in \tau_i$ لكل λ ، عندئذٍ $\bigcup_\lambda G_\lambda \in \tau_i$ ، لأن τ_i تبولوجيا ، لكل $i \in I$

ومنها نستنتج أن $\bigcup_\lambda G_\lambda \in \bigcap_i \tau_i$

iii- الآن نفرض أن لكل $i \in I$ ، $G_k \in \tau_i$ ، $1 \leq k \leq n$ عندئذٍ

$\bigcap_{k=1}^{n} G_k \in \tau_i$ لأن τ_i تبولوجيا ، لكل $i \in I$ ومنها نستنتج أن

$$\bigcap_{k=1}^{n} G_k \in \bigcap_i \tau_i$$

$\therefore$ $\bigcap_i \tau_i$ تبولوجيا على X

ملاحظة :- أن اتحاد تبولوجيتين على مجموعة لا يكون بالضرورة تبولوجيا على المجموعة نفسها

مثال : ليكن $X=\{a,b,c\}$ و $\tau_1=\{\emptyset,\{a\},X\}$ و $\tau_2=\{\emptyset,\{b\},X\}$

عندئذٍ كل من τ_1 و τ_2 تبولوجيا على X ~~و~~ لكن

$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset,\{a\},\{b\},X\}$

ليست تبولوجيا على X ، لماذا ؟

نقاط الغاية Limite Points

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً ولتكن A مجموعة جزئية من X، و x نقطة تنتمي إلى X . يقال عن النقطة x أنها نقطة غاية أو نهاية إلى A إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي
لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على النقطة x يكون:

$$A \cap G - \{x\} \neq \phi$$

أي أن كل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x يجب أن تحتوي على نقطة في A تختلف عن x

أن مجموعة كل نقاط الغاية للمجموعة A تسمى بـ المجموعة المشتقة (derived Set) ويرمز لها بالرمز $d(A)$.

<u>مثال</u> :- ليكن

$X = \{a, b, c, d, e\}$ و

$$\tau = \{\phi, \{a\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$$

و $B = \{b, c, d\}$ ، $A = \{a, b, c\}$

جد $d(A)$ ، $d(B)$

<u>الحل</u> :-

لإيجاد $d(A)$ علينا اختبار جميع نقاط المجموعة X

اختبار النقطة (a) نتأمل

$$A \cap G - \{a\}$$

حيث G هي مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة a أي أن G هي احدى المجموعات $\{a\}, \{a, b, d\}, X$

الآن نأخذ $G = \{a\}$ عندئذٍ يكون

$$A \cap \{a\} - \{a\} = \{a, b, c\} \cap \{a\} - \{a\}$$
$$= \{a\} - \{a\}$$
$$= \phi$$

أي أن a ليست نقطة غاية ، $a \notin d(A)$

اختبار النقطة b

$$A\cap G-\{b\} \overset{?}{=} \phi$$

حيث أن G مجموعة مفتوحة تحتوي على b أي أن G

هي احدى المجموعات $\{b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d,e\},X$

الآن نأخذ $G=\{b,d\}$

[redacted]

$$A\cap G-\{b\}=\{a,b,c\}\cap\{b,d\}-\{b\}$$

$$=\{b\}-\{b\}=\phi$$

$\therefore b\notin d(A)$

اختبار النقطة c

$$A\cap G-\{c\}$$

حيث أن G مجموعة مفتوحة تحتوي على c أي أن G هي

احدى المجموعات $\{b,c,d,e\}\ ,\ X$

$$A\cap G-\{c\}=\{a,b,c\}\cap\{b,c,d,e\}-\{c\}$$

$$=\{b,c\}-\{c\}=\{b\}\neq\phi$$

$$A\cap X-\{c\}=\{a,b,c\}\cap X-\{c\}=\{a,b\}\neq\phi$$

$\therefore$ c نقطة غاية $\Longleftarrow c\in d(A)$

أختبار النقطة d

المجموعات المفتوحة التي تحتوي على d هي ، أي أن G

$$\{b,d\},\ \{a,b,d\},\ \{b,c,d,e\},\ X$$

الآن $G=\{b,d\}$

$$A\cap G-\{d\}=\{a,b,c\}\cap\{b,d\}-\{d\}$$
$$=\{b\}-\{d\}=\{b\}\neq\phi$$

$G=\{a,b,d\}$

$$A\cap G-\{d\}=\{a,b,c\}\cap\{a,b,d\}-\{d\}$$
$$=\{a,b\}-\{d\}=\{a,b\}\neq\phi$$

$G=\{b,c,d,e\}$

$$A\cap G-\{d\}=\{a,b,c\}\cap\{b,c,d,e\}-\{d\}$$
$$=\{b,c\}-\{d\}=\{b,c\}\neq\phi$$

$G=X$

$$A\cap G-\{d\}=\{a,b,c\}\cap X-\{d\}$$
$$=\{a,b,c\}-\{d\}=\{a,b,c\}\neq\phi$$

$\therefore\ d\in d(A)$

الآن أختبار النقطة e

$$A\cap G-\{e\}$$

حيث G مجموعة مفتوحة تحتوي على e ، أي أن G هي

$$X,\ \{b,c,d,e\}$$

الآن $G=\{b,c,d,e\}$

$$A\cap G-\{e\}=\{a,b,c\}\cap\{b,c,d,e\}-\{e\}$$
$$=\{b,c\}-\{e\}=\{b,c\}\neq\phi$$

الآن $G = X$

$$G \cap A - \{e\} = X \cap \{a,b,c\} - \{e\}$$
$$= \{a,b,c\} - \{e\} = \{a,b,c\} \neq \phi$$

$\therefore c \in d(A)$

$\therefore d(A) = \{c,d,e\}$

H.W. $\underline{\underline{d(B)}}$