مثال :- ليكن (X, τ) الفضاء التبولوجي الضعيف و $A \subseteq X$
جد $d(A)$

الحل :- إن المجموعتين المفتوحتين الوحيدتين في التبولوجيا الضعيفة هما X و ϕ
عندئذٍ تكون X المجموعة المفتوحة الوحيدة التي تحتوي على عنصر $x \in X$

$\therefore$ x هي نقطة غاية لأي مجموعة جزئية A في X ماعدا الحالة عندما $A = \phi$ أو $A = \{x\}$ لأنه عندما $A = \phi$ يكون

$$A \cap X - \{x\} = \phi \cap X - \{x\} = \phi$$

وعندما $A = \{x\}$ يكون

$$A \cap X - \{x\} = \{x\} \cap X - \{x\} = \{x\} - \{x\} = \phi$$

أي أن

$$d(A) = \begin{cases} \phi & : \quad A = \phi \\ X - \{x\} & : \quad A = \{x\} \\ X & : \text{في حالات أخرى} \end{cases}$$

مبرهنة :- إذا كانت A, B, E مجموعات جزئية من فضاء تبولوجي (X, τ) فإن

١- $d(\phi) = \phi$

٢- إذا كانت $A \subseteq B$ فإن $d(A) \subseteq d(B)$

٣- إذا كانت $x \in d(E)$ فإن $x \in d(E \setminus \{x\})$

٤- $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$

البرهان :-

١- لكل $x \in X$ و $G \in \tau$ تحتوي على x، نجد أن

$\phi \cap G - \{x\} = \phi$

ومنها نحصل على أن $d(\phi) = \phi$

٢- نفرض أن $A \subseteq B$

عندئذٍ لكل مجموعة مفتوحة G, ولكل نقطة $x \in X$ بحيث أن $x \in G$ نجد أن

$A \cap G - \{x\} \subseteq B \cap G - \{x\}$

الآن نفرض أن $x \in d(A)$ عندئذٍ يكون

$A \cap G - \{x\} \neq \phi$

لكل مجموعة G تحتوي على x ومن (١) نحصل على

$B \cap G - \{x\} \neq \phi$

لكل مجموعة مفتوحة $x \in G$

$\therefore$ $x \in d(B)$ ومنها نحصل على

$d(A) \subseteq d(B)$

٣- الآن تأمل

$$(E\setminus\{x\})\cap G-\{x\}=E\cap\{x\}^c\cap G\cap\{x\}^c$$
$$=E\cap G\cap\{x\}^c$$
$$=E\cap G-\{x\}$$

لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x

ومنها نحصل على أنه إذا كانت $x\in d(E)$ فإن $x\in d(E\setminus\{x\})$

٤- نلاحظ من (٢) أنه

$$A\subseteq A\cup B\Rightarrow d(A)\subseteq d(A\cup B)$$
$$B\subseteq A\cup B\Rightarrow d(B)\subseteq d(A\cup B)$$

ومنها نحصل على

$$d(A)\cup d(B)\subseteq d(A\cup B)\quad ---(*)$$

الآن، سوف نثبت أن

$$d(A\cup B)\subseteq d(A)\cup d(B)$$

نفرض أن $x\notin d(A)\cup d(B)$ وبناء عليه يكون

$$x\notin d(B)\quad و\quad x\notin d(A)$$

حسب تعريف نقطة النهاية، يكون $x\notin d(A)$

∴ توجد مجموعة مفتوحة G_A تحتوي على x بحيث أن

$$G_A\cap A-\{x\}=\emptyset\quad ---①$$

وكذلك لكون $x\notin d(B)$

∴ توجد مجموعة مفتوحة G_B تحتوي على x بحيث أن

$$G_B\cap B-\{x\}=\emptyset\quad ---②$$

لتكن $G = G_A \cap G_B$ ، عندئذٍ G مجموعة مفتوحة تحتوي على x

ومن المعادلة (١) نحصل على

$$G \cap A - \{x\} = \emptyset \quad \text{---} \; (3)$$

ومن المعادلة (2) نحصل على

$$G \cap B - \{x\} = \emptyset \quad \text{---} \; (4)$$

من (3) و (4) نحصل على

$$G \cap (A \cup B) - \{x\} = \emptyset$$

أي أن $x \notin d(A \cup B)$

وبهذا نحصل على أن

$$d(A \cup B) \subseteq d(A) \cup d(B) \quad \text{----} \; (**)$$

ومن المعادلتين (*) و (**) نحصل على

$$d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$$

و.ه.م