المجموعة المغلقة والانغلاق (Closed sets and closure)

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ولتكن F مجموعة جزئية من X، يقال عن المجموعة أنها مغلقة إذا وفقط إذا احتوت على نقاط غايتها، أي أن

$$d(F) \subseteq F$$

مثال: لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ و $\tau=\{\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},X\}$

هل المجموعة $F=\{a,d\}$ مغلقة؟

الحل: نجد أولاً $d(F)$، وبتطبيق تعريف نقطة الغاية نجد أن

$$d(F)=\{d\}$$

بما أن $d(F)\subseteq F$، فإن F تكون مغلقة.

* لاحظ أن $F^c=\{b,c\}$ هي مجموعة مفتوحة

مبرهنة: إذا كانت F مجموعة مغلقة في فضاء تبولوجي (X,τ) وكانت $x\notin F$ فعندئذٍ تكون هناك مجموعة مفتوحة G بحيث أن

$$x\in G\subseteq F^c \quad \text{---} \ (1)$$

البرهان: نفرض الشرط (1) لا يتحقق. أي أن لكل مجموعة مفتوحة G حاوية على x يكون

$$G\cap F\neq\phi$$

وبما أن $x\notin F$ فيكون

$$G\cap F-\{x\}\neq\phi$$

أي أن $x\in d(F)$ (حسب تعريف نقطة الغاية)

ونظراً لكون F مغلقة، أي أن $d(F)\subset F$

فعندئذٍ يكون $x\in F$ وهذا تناقض

#

نتيجة: تكون المجموعة الجزئية في فضاء تبولوجي مغلقة إذا وفقط إذا كانت متممتها مفتوحة.

مثال: ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$

و $\tau=\{\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d,e\},X\}$

جد المجموعات المفتوحة والمغلقة.

الحل:-

المجموعات المفتوحة هي:

$\phi, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d,e\}, X$

المجموعات المغلقة هي

$X, \{b,c,d,e\}, \{a,d,e\}, \{d,e\}, \{a\}, \phi$

نلاحظ من المثال أعلاه ما يأتي

أن $\{b,c,d,e\}, \{a\}, X, \phi$ مجموعات مفتوحة ومغلقة معاً.

وأن $\{a,b,c\}, \{b,c\}$ مجموعات مفتوحة وليست مغلقة.

وأن $\{a,d,e\}, \{d,e\}$ مجموعات مغلقة وليست مفتوحة.

تعريف: يدعى الفضاء التبولوجي (X,τ) "فضاء بابياً" إذا كانت كل مجموعة جزئية من X مفتوحة أو مغلقة.

مثال: ليكن [redacted] $X=\{a,b\}$

و $\tau=\{\phi,\{a\},X\}$

من الواضح أن الفضاء (X,τ) "بابياً"

الانغلاق (closure)

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و E مجموعة جزئية من X ، يعرف انغلاق المجموعة E ويرمز له بالرمز $\bar{E}$. بأنه تقاطع كل المجموعات المغلقة الحاوية على E ، أي أن $\bar{E}=\bigcap_i F_i$

حيث F_i مغلقة و $E\subseteq F_i$

مثال: ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$

و $\tau=\{\phi, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d,e\}, X\}$

جد $\overline{\{b,c\}}$, $\overline{\{d,e\}}$, $\overline{\{a,b\}}$

الحل :-

المجموعات المغلقة هي

$X, \{b,c,d,e\}, \{a,d,e\}, \{d,e\}, \{a\}, \phi$

من التعريف أعلاه

$\overline{\{b,c\}}=\{b,c,d,e\}\cap X=\{b,c,d,e\}$

$\overline{\{d,e\}}=\{d,e\}\cap\{a,d,e\}\cap X=\{d,e\}$

$\overline{\{a,b\}}$ H.w.

مبرهنة : لتكن E مجموعة جزئية في فضاء تبولوجي، عندئذٍ يكون

$$\bar{E} = E \cup d(E)$$

البرهان :

الاتجاه الأول : من تعريف الانغلاق، نستنتج $E \subseteq \bar{E}$ ... (1)

ايضاً من (1) نحصل على

$$d(E) \subseteq d(\bar{E}) \subseteq \bar{E} \quad \text{---} (2)$$

لأن $\bar{E}$ مغلقة، حسب تعريف الانغلاق وتحتوي على جميع نقاط غايتها، من (1) و (2) نحصل على

$$E \cup d(E) \subseteq \bar{E}$$

الاتجاه الثاني : سوف نثبت أن $\bar{E} \subseteq E \cup d(E)$

وبما أن $E \subseteq E \cup d(E)$

∴ يكفي أن نثبت أن $E \cup d(E)$ مغلقة

أي أن $(E \cup d(E))^c$ مجموعة مفتوحة

نفرض $X \notin E \cup d(E)$

أي أن $X \notin d(E)$ و $X \notin E$

بما أن $X \notin d(E)$

∴ توجد مجموعة مفتوحة G_X تحتوي على X بحيث أن

$$G_X \cap E - \{X\} = \phi$$

وبما أن $X \notin E$ ، نجد أن $G_X \cap E = \phi$

وعليه يكون $G_X \subseteq E^c$

والآن G_x مجموعة مفتوحة تحتوي على x ولا تتقاطع مع E
أي أن كل نقطة من نقاط G_x لا تكون نقطة غاية للمجموعة E.
أي أن

$$G_x \subseteq (d(E))^c \quad ---(4)$$

من (3) و (4) نجد أن

$$(E \cup d(E))^c = \cup \{G_x : x \notin E \cup d(E)\}$$

$\therefore$ $(E \cup d(E))^c$ مجموعة مفتوحة

وبهذا تم البرهان.

<u>مثال</u>: لتكن $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ---\}$ مجموعة جزئية من R
و τ التبولوجيا الاعتيادية على R عندئذٍ A لها نقطة غاية
واحدة هي (0)

$$\therefore \bar{A} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ----\}$$