الحلقات

الفصل الاول

المحاضرة الاولى

م.م. احمد طه احمد

Scanned with CamScanner
تم المسح ضوئيا بـ CamScanner

تعريف (1): لتكن S مجموعة غير خالية, اي دالة من الضرب الديكارتي S*S الى S تسمى العملية الثنائية على S

تعريف (2): النظام الرياضي هو اي مجموعة غير خالية مع (واحد او ثنين) من العمليات الثنائية معرفة على S ويرمز لها بالرمز (S,*,o) ,(S,*)

مثال: (Z,·) , (Q,·) , (N,+) , (R,·) , (Z,+)

تعريف (3): الانغلاق: لكل $a, b\in S$ تكون $a*b\in S$

تعريف (4): العملية (*) يقال انها تجميعية على المجموعة S اذا كان

$a*(b*c) = (a*b)*c$ ولكل $a, b \in S$

تعريف (5): لتكن S مجموعة غير خالية الثنائية (S, *) تسمى شبة زمرة اذا تحققت الشروط

1) خاصية الانغلاق
2) خاصية التجميع

مثال: $(Z_e,+)$, (Z,·) , (R,·) , (Z,+) شبة زمرة

تعريف (6): الثنائية (G,*) زمرة اذا وفقط اذ (G,*) شبة زمرة مع العنصر المحايد ولكل عنصر في G لهو معكوس

تعريف (7): لتكن G مجموعة غير خالية ولتكن (+) و(·) علاقتين ثنائيتين على G تكون (G,+,·) حلقه اذا تحققت الشروط

1) (G,+) ~~شبة زمرة~~ زمرة ابدالية , 2) (G,·) شبة زمرة 3) $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ لكل $a,b,c \in G$

مثال: $(\mathbb{C}, +,\cdot)$, (Q,+,·) , (R,+,·) , (Z,+,·) تحقق شروط الحلقة

تعريف (8): الحلقة (G,+,·) تسمى حلقة ابداليه اذا كان $\forall a, b \in G\ ,\ a \cdot b = b \cdot a$

تعريف (9): الحلقة (G,+,·) تسمى حلقة مع العنصر المحايد مع الضرب اذا $\exists 1 \in G$ بحيث ان $a\cdot 1=1\cdot a=a$

مثال: $(Z_e,+_e,\cdot_e)$ حلقة ابداليه بدون عنصر محايد

تعريف (10): لتكن (G,+,·) حلقة مع العنصر المحايد, اي عنصر $0 \neq a\ ,a \in G$ يسمى معكوس اذا $\exists a^{-1} \in G$ بحيث ان $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

Scanned with CamScanner

مثال: $(Z_5, +_5, \cdot_5)$ كل عنصر يحتوي معكوس

$$1 \cdot_5 1 = 1 \ , \quad 2 \cdot_5 3 = 1 \ , \quad 3 \cdot_5 2 = 1 \quad , \quad 4 \cdot_5 4 = 1$$

مثال: جد معكوس العناصر ل Z_8

$$1 \cdot_8 1 \quad , \quad 3 \cdot_8 3 \quad , \quad 5 \cdot_8 5 \quad , \quad 7 \cdot_8 7$$

2, 4 , 6 ليس لها معكوس

مبرهنة (1): في اي حلقة (R,+,·) اذا كانت $a \in R$ تكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (عندما 0 هو العنصر المحايد مع الجمع) (بدون برهان)

مبرهنة (2): اذا كانت (R,+,·) حلقة و $a, b \in R$ تكون

$$-(ab) = a(-b) = (-a)b$$

البرهان:

1) نبرهن ان $-(ab) = a(-b)$

$$a(-b) + ab = a \cdot (-b + b)$$
$$= a \cdot 0 \quad \text{بواسطة المبرهنة(1)}$$
$$= 0$$

2) نبرهن ان $-(ab) = (-a)b$

$$(-a)b + ab = (-a + a)b$$
$$= 0 \cdot b \quad \text{بواسطة المبرهنة(1)}$$
$$= 0$$

3) نبرهن ان $(-a)b = a(-b)$

بما ان معكوس $(ab)-$ هو $a(-b)$ حسب البرهان (1) و معكوس $(ab)-$ هو $(-a)b$ حسب البرهان (2)

بما ان المعكوس وحيد في الزمرة

لذلك فان $a(-b) = (-a)b$

تعريف (11) : الحلقة (R,+,·) يقال انها تمتلك قاسم صفري اذا لا يوجد عنصر يساوي صفر. $a, b \in R$ بحيث ان $a \cdot b = 0$

مثال: $(Z_4, +_4, \cdot_4)$

Scanned with CamScanner

تم مسحه ضوئيا بـ CamScanner

$$Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

$\{\bar{2}\}$ تمتلك قاسم صفري $\qquad 0 \neq 2, 2 \cdot_4 2 = 0$

مثال: $(Z_7, +_7, \cdot_7) \quad , \quad (Z_5, +_5, \cdot_5)$

تعريف (12): لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة تسمى (R) مساحة عددية اذا كانت (R) حلقة ابداليه مع العنصر المحايد ولا تمتلك قواسم صفرية.

مثال: $(Z_5, +_5, \cdot_5), \ (Z_7, +_7, \cdot_7)$ تكون مساحة عددية

لكن $(Z_6, +_6, \cdot_6)$ ليست مساحة عددية لان $3 \cdot_6 2 = 0$ تمتلك قاسم صفري

مبرهنة (3): الحلقة $(R,+,\cdot)$ خالية من القواسم الصفرية اذا وفقط اذا قانون الحذف للضرب متحقق في (R)

البرهان:

الاتجاه الاول

نفرض ان (R) خالية من القواسم الصفرية, نبرهن ان قانون الحذف متحقق في (R)

اذا $\qquad a \cdot b = a \cdot c \quad , \quad a, b, c \in R \ , \ a \neq 0$

$$a \cdot b - a \cdot c = 0 \rightarrow a(b - c) = 0$$

بما ان (R) لا تمتلك قواسم للصفر و $a \neq 0$

تكون $\qquad b - c = 0 \quad \rightarrow b = c$

لذلك فان قانون الحذف متحقق

الاتجاه الثاني

لتكن $a, b \in R$ بحيث ان $a \cdot b = 0$ اذا

$$a \neq 0 \quad \rightarrow \quad a \cdot b = a \cdot 0$$

حسب قانون الحذف والمبرهنة (1)

$$b = 0$$

اذا كان

$$b \neq 0 \quad \rightarrow \quad a \cdot b = 0 \cdot b$$

حسب قانون الحذف والمبرهنة (1)

$$a = 0$$

$\therefore$ R خالية من القواسم الصفرية

Scanned with CamScanner
تم المسح ضوئيا بـ CamScanner