# المحاضرة الثانية

## الحلقة الجزئية (subring)

تعريف: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ولتكن $\emptyset \neq S \subseteq R$, $(S,+,\cdot)$ تمثل حلقة جزئية اذا تحققت الشروط الاتية:

$1)\ a-b \in S \quad , \quad \forall a,b \in S$

$2)\ a\cdot b \in S \quad , \quad \forall a,b \in S$

---

مثال: هل $(Z_e,+,\cdot)$ حلقة جزئية من $(Z,+,\cdot)$ , حيث $Z_e$ الاعداد الصحيحة الزوجية

$4-2=2 \in Z_e \qquad , \qquad 4\cdot 2 = 8 \in Z_e$

$\therefore Z_e$ حلقة جزئية من $Z$

هل $(Z_o,+,\cdot)$ حلقة جزئية من $(Z,+,\cdot)$ , حيث $Z_o$ الاعداد الصحيحة الفردية

$1-3=2 \notin Z_o$

$\therefore Z_o$ حلقة غير جزئية من $Z$

---

مثال: لتكن $(Z_{12},+_{12},\cdot_{12})$ حلقة, هل ان $H_1 = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10}\}$ , $H_2=\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}$ , $H_3=\{\bar{0},\bar{8}\}$ حلقة جزئية

**ملاحظة**: كل حلقة $(R,+,\cdot)$ تمتلك على الاقل حلقتين جزئيتين $(R,+,\cdot)$ و $(\{0\},+,\cdot)$ تسمى حلقة جزئية تافهة

---

**تعريف:** لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ابداليه مع العنصر المحايد بحيث كل عنصر ماعدا الصفر لهُ معكوس تسمى $(R,+,\cdot)$ حقل (field)

بصيغة اخرى: $(R,+,\cdot)$ تمثل حقل اذا تحققت الشروط الاتية

1) $(R,+)$ زمرة ابداليه

2) $(R,\cdot)$ شبة زمرة

3) قانون التوزيع 4)خاصية العنصر المحايد وقانون الابدال مع الضرب

**مبرهنة(4-1):** الحقل لا يمتلك قواسم صفرية

**البرهان:**

لتكن $R$ حقل و

$$a, b \in R \quad s.t \quad a \cdot b = 0$$

لتكن $a \neq 0 \rightarrow \exists a^{-1} \in R$

بما أن $a \cdot b = 0$

تكون $a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot 0$$

$$I \cdot b = 0 \quad \rightarrow b = 0$$

بنفس الطريقة نبرهن. اذا كانت $b \neq 0$

---

**نتيجة:** كل حقل هو مساحة عددية

البرهان: لتكن $R$ حقل

لذلك فان $R$ حلقة ابداليه مع العنصر المحايد و بواسطة المبرهنة (1-4)

$R$ لا تمتلك قواسم صفرية

اذن $R$ تمتلك مساحة عددية

**ملاحظة:**

1) المساحة العددية المنتهية تمثل حقل

2) الحلقة الابداليه المنتهية بدون القواسم الصفرية تمثل حقل

---

**تعريف:** لتكن $R$ حلقة ~~[illegible]~~ المركز للحلقة $R$ يرمز لهُ بالرمز $C(R)$ وهو المجموعة

$$C(R) = x \in R : x \cdot y = y \cdot x, \ \forall y \in R\}$$

**مبرهنة(5):** في اي حلقة $(R, +, \cdot)$ فأن $(C(R), +, \cdot)$ حلقة جزئية من $(R, +, \cdot)$

**البرهان:**

نبرهن ان $C(R) \subseteq R$

$$\exists 0 \in C(R) \quad s.t \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a, \ \forall a \in R \quad \rightarrow \quad C(R) \neq \emptyset$$

1) نبرهن ان $a - b \in C(R)$

لتكن $a, b \in C(R)$

ولتكن $x \in R$

$$(a-b)x = \big(a + (-b)\big)x =$$

$$a \cdot x + (-b) \cdot x = x \cdot a + (-x) \cdot b = \ x \cdot a + x \cdot (-b) =$$

$$x(a-b)$$

$\therefore a - b \in C(R)$

1) نبرهن ان $a \cdot b \in C(R)$

لتكن $a, b \in C(R) \ , \quad x \in R$

$$(a \cdot b)x = a(b \cdot x) = \ a(x \cdot b) = \ (a \cdot x)b = \ (x \cdot a)b =$$

$$x(a \cdot b)$$

$\therefore a \cdot b \in C(R)$

لذلك فان $(C(R), +, \cdot)$ حلقة جزئية من $(R, +, \cdot)$

---

مثال: اذا كانت $R = \{ a + b\sqrt{3} \ , \ a, b \in R \}$ برهن ان $(R, +, \cdot)$ حلقة ابداليه مع المحايد ؟

تعريف: صفة الحلقة (Characteristic of ring) $(R, +, \cdot)$ هي أصغر عدد صحيح موجب $(n)$ بحيث ان $n \cdot a = 0 \quad \forall a \in R$

مثال: صفة $Z_7$ هي(7) لان (7) اصغر عدد صحيح موجب بحيث ان $7 \cdot a = 0$, $\forall a \in Z_7$

مبرهنة: اذا كانت $R$ حلقة تكون $R$ حلقة ابدالية اذا وفقط اذا

$$Cent(R) = R$$

البرهان:

$\Leftarrow$

نفرض أن $R$ حلقة ابدالية

نبرهن أن $Cent\,R = R$

$$Cent\,R \subseteq R \quad ---(1)$$

يجب ان نبرهن ان $R \subseteq Cent\,R$

لتكن

$$\forall\, r \in R \longrightarrow ra = ar \in R \;;\; \forall a \in R$$

$\because$ $R$ حلقة ابدالية و $ar = ra \in Cent\,R$

$$\therefore R \subseteq Cent\,R \quad ---(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن

$$R = Cent\,R$$

$\Rightarrow$

نفرض أن $Cent\,R = R$

نبرهن أن $R$ حلقة ابدالية

$$\because Cent\,R = \{a \in R : ar = ra \mid r \in R\}$$

$\because$ $Cent\,R$ ابداليه و $Cent\,R = R$

$\therefore$ $R$ حلقة ابدالية