الحلقات

الفصل الاول

المحاضرة الثالثة

م.م. احمد طه احمد

مبرهنة: لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة مع العنصر المحايد و خالية من القواسم الصفرية. اذا كانت $a^2=a$ عندما $a\in R$ تكون

اما $a=0$ أو $a=1$

البرهان: نفرض $a\neq 0$

$$a^2=a \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0$$

بما أن $a\neq 0$

$$a-1=0 \Rightarrow a=1$$

اذا كانت $a\neq 1$

$$a-1\neq 0 \Rightarrow a=0$$

س1/ لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة اثبت ان

① العنصر المحايد $e_1+e_2\sqrt{3} = 1+0\sqrt{3}$

نفرض ان العنصر المحايد $e_1+e_2\sqrt{3}$

حسب قاعدة العنصر المحايد $a\cdot e = a$

$$(a+b\sqrt{3})(e_1+e_2\sqrt{3}) = a+b\sqrt{3}$$

$$ae_1+ae_2\sqrt{3}+be_1\sqrt{3}+3be_2 = a+b\sqrt{3}$$

$$ae_1+3be_2+(ae_2+be_1)\sqrt{3} = a+b\sqrt{3}$$

$$ae_1+3be_2 = a \quad ---(1)$$

$$ae_2+be_1 = b \quad ---(2)$$

من المعادلة (1)

$$3be_2 = a-ae_1$$

$$e_2 = \frac{a-ae_1}{3b} \quad ---(3)$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2)

$$a\left(\frac{a-ae_1}{3b}\right)+be_1 = b$$

$$\left.\frac{a^2-a^2e_1}{3b}+be_1 = b\ \right] \times 3b$$

$$a^2-a^2e_1+3b^2e_1 = 3b^2$$

$$(-a^2+3b^2)e_1 = 3b^2-a^2$$

$$e_1 = \frac{3b^2-a^2}{3b^2-a^2} = 1$$

نعوض قيمة (e_1) في المعادلة (3)

$$e_2 = \frac{a-a(1)}{3b} = \frac{a-a}{3b}$$

$$e_2 = \frac{0}{3b} = 0$$

$\therefore$ العنصر المحايد

$$e_1+e_2\sqrt{3} = 1+0\sqrt{3}$$

② جد قيمة المعكوس ثم ~~...~~ الاثبات

$a * a^{-1} = e$

$$(a+b\sqrt{3})\cdot(a+b\sqrt{3})^{-1} = e_1 + e_2\sqrt{3}$$

نفرض أن

$$(a+b\sqrt{3})^{-1} = x + y\sqrt{3}$$

$$(a+b\sqrt{3})\cdot(x+y\sqrt{3}) = 1 + 0\sqrt{3}$$

$$ax + ay\sqrt{3} + bx\sqrt{3} + 3by = 1 + 0\sqrt{3}$$

$$ax + 3by = 1 \quad \text{---} (1)$$

$$ay + bx = 0 \quad \text{---} (2)$$

من المعادلة (2)

$$bx = -ay \Rightarrow x = \frac{-ay}{b} \quad \text{---} (3)$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (1)

$$a\left(\frac{-a}{b}y\right) + 3by = 1$$

$$\frac{-a^2y}{b} + 3by = 1 \quad] \times b$$

$$-a^2y + 3b^2y = b$$

$$(-a^2+3b^2)y = b$$

$$y = \frac{b}{-a^2+3b^2}$$

نعوض (y) في المعادلة (3)

$$x = \frac{-a}{\cancel{b}}\left(\frac{\cancel{b}}{-a^2+3b^2}\right)$$

$$x = \frac{-a}{-a^2+3b^2}$$

الاثبات

$$(a+b\sqrt{3})(x+y\sqrt{3}) = 1+0\sqrt{3}$$

$$(a+b\sqrt{3})\left(\frac{-a}{-a^2+3b^2} + \frac{b}{-a^2+3b^2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{-a^2}{-a^2+3b^2} + \cancel{\frac{ab}{-a^2+3b^2}\sqrt{3}} - \cancel{\frac{ab}{-a^2+3b^2}\sqrt{3}} + \frac{3b^2}{-a^2+3b^2}$$

$$= \frac{-a^2}{-a^2+3b^2} + \frac{3b^2}{-a^2+3b^2} = \frac{\cancel{-a^2+3b^2}}{\cancel{-a^2+3b^2}} = 1+0\sqrt{3}$$

③ هل الحلقة تحتوي على قواسم صفرية

$$(a_1+b_1\sqrt{3})(a_2+b_2\sqrt{3}) = 0+0\sqrt{3}$$

قانون

اذا كانت $a_2+b_2\sqrt{3}=0$

$$a_1a_2+3b_1b_2+a_1b_2\sqrt{3}+a_2b_1\sqrt{3} = 0+0\sqrt{3}$$

$$a_1a_2+3b_1b_2=0 \quad ---(1)$$

$$a_1b_2+a_2b_1=0 \quad ---(2)$$

من المعادلة (1)

$$a_1a_2=-3b_1b_2$$

$$a_2=\frac{-3b_1b_2}{a_1} \quad ---(3)$$

نعوض المعادلة (3) في (2)

$$a_1b_2 + \frac{-3b_1^2b_2}{a_1}=0 \quad]\times a_1$$

$$a_1^2b_2-3b_1^2b_2=0$$

$$a_1^2=\frac{3b_1^2b_2}{b_2}$$

$$a_1^2=3b_1^2 \Rightarrow a_1^2-3b_1^2=0$$

$$(a_1+\sqrt{3}b_1)(a_1-\sqrt{3}b_1)=0$$

اما $a_1+\sqrt{3}b_1=0 \Rightarrow a_1=0,\ b_1=0$

أو $a_1-\sqrt{3}b_1=0 \Rightarrow a_1=0$ و $b_1=0$

لذلك

$$\therefore a_1+b_1\sqrt{3}=0$$

لذلك فان $(R,+,\cdot)$ لا تمتلك قواسم صفرية