الحلقات

الفصل الثاني

المحاضرة الرابعة

م.م. احمد طه احمد

The ideal المثاليات

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة ولتكن $(I,+,\cdot)$ حلقة جزئية من $(R,+,\cdot)$ $\{\emptyset \neq I \subseteq R\}$ تكون $(I,+,\cdot)$ حلقة مثالية اذا وفقط اذا تحققت الشروط

1) $a-b \in I \quad , \forall a,b \in I$
2) $a\cdot r \in I \;\; and \;\; r\cdot a \in I \quad , \quad \forall a \in I \; , \; \forall r \in R$

يسمى الشرط $a\cdot r \in I$ مثالي من اليمين
ويسمى الشرط $r\cdot a \in I$ مثالي من اليسار .

مثال / الحلقة $(Z,+,\cdot)$ ولتكن $(Z_e,+_e,\cdot_e)$ حلقة جزئية هل ان Z_e مثالي من Z

لتكن

$a,b \in Z_e \;, \qquad i.e \qquad a=2n\;, \quad b=2n$

1) $a-b=2n-2m=2(n-m) \in Z_e$
2) $a \in Z_e\;, c \in Z_e$
$a\cdot c=(2n)\cdot c \;=\; 2(n\cdot c) \in Z_e$

∴ $(Z_e,+_e,\cdot_e)$ مثالي من $(Z,+,\cdot)$

مثال/ هل ان $(Z,+,\cdot)$ مثالي من $(R,+,\cdot)$

مبرهنة(1): لتكن $(I_i,+,\cdot)$ مجموعة من المثاليات من $(R,+,\cdot)$ تكون $(\cap I_i,+,\cdot)$ كذلك مثالية من $(R,+,\cdot)$

البرهان:

I_i مثالية , $\forall i$

$0 \in I_i \;\rightarrow\; 0 \in \cap I_i \;\; \forall i$

1) $x,y \in \cap I_i \quad \rightarrow \quad x,y \in I_i \;\; \forall i$

بما أن I_i مثالية , $\forall i$

$x - y \in I_i \quad \forall i \qquad \rightarrow \qquad x - y \in \cap I_i \quad \forall i$

$2)\ x \in \cap I_i \quad , r \in R \qquad \rightarrow \qquad x \in I_i$

بما أن $x \in I_i$ و $r \in R$, و I_i مثالية

$\rightarrow \quad r \cdot x \in I_i \quad \forall i \qquad \rightarrow r \cdot x \in \cap I_i \quad \forall i$

$x \cdot r \in I_i \quad \forall i \qquad \rightarrow \quad x \cdot r \in \cap I_i \quad \forall i$

لذلك فان $(\cap I_i, +, \cdot)$ مثالية من $(R, +, \cdot)$

تعريف: لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة, المثالي $(I, +, \cdot)$ يسمى مثالي فعلياذا وفقط اذا $I \neq 0$ و $I \subseteq R$

مثال / لتكن $(Z_6, +_6, \cdot_6)$ حلقة

<2> ={ 0, 2, 4} , <3> ={0, 3} مثاليات فعلية

المثالي الفعلي يمثل جميع المجموعات الجزئية ماعدا (الصفر , المجموعة الكلية)

مبرهنة: الحقل لا يمتلك مثالي فعلي

البرهان: نفرض ان الحقل (F) مثالي فعلي

$\therefore I \neq 0 \quad , 0 \neq a \in I \ \rightarrow I \subseteq F$

$a \in I \quad \rightarrow a \in F$

بما أن F حقل

$a^{-1} \in F \quad \rightarrow \quad aa^{-1} \in I \quad \rightarrow 1 \in I$

$\forall x \in F \quad , 1 \cdot x \in I \quad \rightarrow x \in I$

$\therefore F \subseteq I \quad , \quad I \subseteq F$

$\therefore I = F$

∴ الحقل لا يمتلك مثالي فعلي

س/ بين أن كل مثالي (ideal) هو حلقة جزئية (subring)
وهل العكس صحيح ؟

ج/ لتكن $(I,+,\cdot)$ مثالية للحلقة $(R,+,\cdot)$

تكون

$\because$ $(I,+,\cdot)$ مثالية

$a-b\in I$

$a\cdot b\in I \quad \forall a,b\in I$

$\forall a\in I\ ,\ I\subseteq R \Rightarrow a\in R$

لذلك

$\forall a\in R\ ,\ b\in I \Rightarrow a\cdot b\in I$

$b\cdot a\in I$

لذلك I حلقة جزئية من R

العكس لا يتحقق : حسب المثال :

(Z) حلقة جزئية من (R)

لكن (Z) ليست مثالية من (R)

بسبب

$a=5\in Z\ ,\ r=\frac{1}{2}\in R$

$r\cdot a=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}\notin Z$