الحلقات

الفصل الثاني

المحاضرة السادسة

م.م. احمد طه احمد

5) شبه مثالي أولي Semiprime ideal

المثالي (I) في الحلقة (R) يسمى شبه مثالي أولي اذا كانت

$a^2 \in I \ , a \in I \ , \forall a \in R$

مثال/ في الحلقة Z_{12} هل أن

$I_1 = \langle \bar{2} \rangle \ , I_2 = \langle \bar{3} \rangle \ . I_3 = \langle \bar{4} \rangle \ , I_4 = \langle \bar{6} \rangle$

شبه مثالي أولي

$I_1 = \langle \bar{2} \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

شبه مثالي أولي

$0^2 = 0 \in I \ , 2^2 = 4 \in I, \ 4^2 = 16 = 4 \in I$

$6^2 = 36 = 0 \in I \ , 8^2 = 64 = 4 \in I, 10^2 = 100 = 4 \in I$

* * * *

6) المثاليات ~~الأعظمية~~ العظمى Maximal ideals

I هو اعظم اذا كان $I \subset M \subseteq R$ ~~هو~~ تكون $M = R$

و M اعظم مثالية في R

أو

المثالي M في الحلقة R يسمى مثالي اعظمي في R اذا تحققت الشروط

① $M \neq R$ (لايساوي الحلقة الأصلية)

② لايوجد مثالي I في الحلقة R, بحيث ان $M \subset I \subseteq R$

فقط عندما $I = M$ أو $I = R$

مثال / Z_{18} حلقة تمتلك مثاليات $\langle \bar{2} \rangle , \langle \bar{3} \rangle , \langle \bar{6} \rangle , \langle \bar{9} \rangle$

مثاليات اعظمية $\langle \bar{2} \rangle , \langle \bar{3} \rangle$

ليست مثالي اعظمي $\langle \bar{6} \rangle$

لأن

$\langle 6 \rangle \subset \langle 2 \rangle \subseteq Z_{18}$, $\langle 6 \rangle \neq \langle 2 \rangle$, $\langle 2 \rangle \neq Z_{18}$

ليست مثالي اعظمي $\langle \bar{9} \rangle$

لأن

$\langle \bar{9} \rangle \subset \langle \bar{3} \rangle \subseteq Z_{18}$, $\langle \bar{9} \rangle \neq \langle \bar{3} \rangle$, $\langle \bar{3} \rangle \neq Z_{18}$

(تكون المجموعة تمثل مثالي اعظمي اذا لم توجد مجموعة اكبر منها تحتويها عدا الحلقة)

smallest ideals

7) المثاليات الصغرى

تعريف / لتكن $(R,+,.)$ حلقة و S مجموعة جزئية غير خالية من R تعرف المجموعة S' مثالية

$$S' = \{\cap I : S \subseteq I\}$$

حيث $(I,+,.)$ مثالية من R

مثال / لتكن $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, ._{12})$ حلقة

$H_1 = \mathbb{Z}_{12}$, $H_2 = \{0,2,4,6,8,10\}$, $H_3 = \{0,3,6,9\}$

$H_4 = \{0,6\}$, $H_4 = \{0,4,8\}$

$$S' = \{H_2 \cap H_3 \cap H_4\} = H_4 = \{0,6\}$$

مبرهنة / لتكن $(R,+,.)$ حلقة ابدالية و $a \in R$ تكون $R_a = \{ra \mid r \in R\}$ مثالية من R

البرهان /

$\because R_a \subseteq R$

1- $r_1 a, r_2 a \in R_a$, $\forall r_1, r_2 \in R$

$\therefore r_1 a - r_2 a = (r_1 - r_2) a \in R_a$

2- $r_1 a \in R_a$, $r \in R$

$r(r_1 a) = (r \cdot r_1) a \in R_a$ $\because r \cdot r_1 \in R$

$(r_1 a) r_2$ $r_1(ar) = r_1(ra) = (r_1 r) a \in R_a$

لذلك R_a مثالية في R