الحلقات

الفصل الثاني

المحاضرة السابعة

م.م. احمد طه احمد

مبرهنة / لتكن $(S_1,+,\cdot)$, $(S_2,+,\cdot)$ مثاليات في R تكون $(S_1+S_2,+,\cdot)$ مثالي في $(R,+,\cdot)$

البرهان /

$\because 0 = 0+0 \in S_1+S_2 \Rightarrow S_1+S_2 \neq \phi$

1- $a_1+a_2 , b_1+b_2 \in S_1+S_2$, $a_1,b_1 \in S_1$, $a_2,b_2 \in S_2$

$(a_1+a_2)-(b_1+b_2) = (a_1-b_1)+(a_2-b_2) \in S_1+S_2$

2- $a_1+a_2 \in S_1+S_2$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$, $r \in R$

$r(a_1+a_2) = ra_1+ra_2 \in S_1+S_2$

$\because$ S_1, S_2 مثاليات

$\therefore$ S_1+S_2 مثالي في R

مبرهنة / لتكن $(I,+,\cdot)$ مثالي في $(R,+,\cdot)$ تكون $(I,+,\cdot)$ مثالي اعظمي اذا وفقط اذا $I+a=R$, $\forall a \notin I$

البرهان / $\Leftarrow$

نفرض أن I مثالي اعظمي , $\forall a \notin I$. نبرهن أن $I+a=R$

$\because a \notin I \Rightarrow I \subset I+a \subseteq R$

$\therefore$ I مثالي اعظمي . تكون $I+a=R$

$\Rightarrow$ نفرض أن $I+a=R$, $\forall a \notin I$ ، نبرهن أن I مثالي اعظمي

لتكن $(J,+,\cdot)$ مثالي في R بحيث أن $I \subset J \subseteq R$

$\exists a \in J , a \notin I \Rightarrow I \subset I+a \subseteq R$

, $I+a=R$

$\therefore I \subset I+a \subseteq J \subseteq R$

$\therefore J = R$

مبرهنة: لتكن $(I_1,+,\cdot)$ و $(I_2,+,\cdot)$ أي مثاليات في الحلقة $(R,+,\cdot)$

$\forall I_1 \cap I_2 \neq \phi$ تكون $(I_1 \cap I_2,+,\cdot)$ مثالي في $(R,+,\cdot)$

البرهان/

$I_1 \subseteq R$, $I_2 \in R \Longrightarrow I_1 \cap I_2 \subseteq R$.

$I_1 \cap I_2 \neq \phi$

1) $a,b \in I_1 \cap I_2 \Longrightarrow a,b \in I_1$, $a,b \in I_2$

$\because$ I_1, I_2 مثاليات في R تكون

$a-b \in I_1$, $a-b \in I_2 \Longrightarrow a-b \in I_1 \cap I_2$

2) $a \in I_1 \cap I_2$, $r \in R$

$\because$ I_1, I_2 مثاليات في R تكون

$ra, ar \in I_1$, $ra, ar \in I_2$

تكون

$ra, ar \in I_1 \cap I_2$

$\therefore$ $(I_1 \cap I_2,+,\cdot)$ مثالي في $(R,+,\cdot)$

مبرهنة: اذا كانت $(I,+,\cdot)$ و $(J,+,\cdot)$ مثاليات للحلقة $(R,+,\cdot)$ فان

1) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

2) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

البرهان:

1) بما أن $\sqrt{I}$ مثالي للحلقة R (حسب المبرهنة السابقة (2))

فأن

$$\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}} \quad ---(1)$$

لتكن

$$r \in \sqrt{\sqrt{I}} \Rightarrow r^n \in \sqrt{I} \quad \text{لكل} \quad n \in Z^+$$

$$(r^n)^m \in I \;, \text{لكل} \quad m \in Z^+$$

$$r^{n \cdot m} \in I \;, \text{لكل} \quad n, m \in Z^+$$

$$\Rightarrow r \in \sqrt{I} \Rightarrow \sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I} \quad ---(2)$$

من المعادلتين (1) و (2)

$$\therefore \sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$$

البرهان:

2)

$$r \in \sqrt{I \cap J} \quad \text{فأن} \quad \exists n \in Z^+$$

$$r^n \in I \cap J \Rightarrow r^n \in I \;, r^n \in J$$

فأن

$$r \in \sqrt{I} \;, r \in \sqrt{J} \Rightarrow r \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

$$\therefore \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \quad ---(1)$$

لتكن :

$r \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \Rightarrow r \in \sqrt{I} \,,\, r \in \sqrt{J}$

$\Rightarrow r^n \in I \,,\, r^n \in J$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow r^n \in I \cap J \Rightarrow r \in \sqrt{I \cap J}$

$\therefore \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I \cap J}$ --- (2)

من المعادلتين (1) و (2) نستنتج أن

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$