الحلقات

الفصل الثالث

المحاضرة الثامنة

م.م. احمد طه احمد

Quotient Ring حلقة القسمة

تعريف: لتكن $(I,+,\cdot)$ مثالي للحلقة $(R,+,\cdot)$ تكون R/I حلقات مثالية معرفة بواسطة

$$R/I = \{a+I \in R$$ } تسمى حلقة القسمة

وان العملية الثنائية $(+)$ معرفة على R/I بواسطة

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$$

والعملية الثنائية $(\cdot)$ معرفة على R/I بواسطة

$$(a+I)\cdot(b+I) = (a\cdot b)+I$$

ملاحظة*: هل أن عملية الجمع والضرب معرفه على R/I

① بالنسبة لعملية الجمع:

لتكن

$$a+I = a_1+I \quad \text{و} \quad b+I = b_1+I$$

$$\Rightarrow a_1-a \in I \ , \ b_1-b \in I \Rightarrow (a_1+b_1)-(a+b) \in I$$

$$\Rightarrow (a_1+b_1)+I = (a+b)+I$$

$$\Rightarrow (a_1+I)+(b_1+I) = (a+I)+(b+I)$$

② بالنسبة لعملية الضرب:

لتكن

$$a+I = a_1+I \ , \ b+I = b_1+I$$

$$a_1-a \in I \ , \ b_1-b \in I \Rightarrow a_1-a = i \ , \ b_1-b = i_1 \ \forall i,i_1 \in$$

$$a_1 = i+a \ , \ b_1 = i_1+b \Rightarrow a_1b_1 = ii_1+ib+ai_1+ab \in I$$

$$a_1b_1-ab = ii_1+ib+ai_1 \in I \Rightarrow a_1b_1-ab \in I$$

$$a_1b_1+I = ab+I \Rightarrow (a_1+I)\cdot(b_1+I) = (a+I)\cdot(b+I)$$

مثال/ $(Z_6/_{<2>}, +_6, \cdot_6)$ هي حلقة قسمة

$Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, $<\bar{2}> = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

$\bar{0} + <\bar{2}> = \bar{0} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$

$\bar{1} + <\bar{2}> = \bar{1} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$

$\bar{2} + <\bar{2}> = \bar{2} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}\} = \bar{0} + <\bar{2}>$

$\bar{3} + <\bar{2}> = \bar{3} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{3} + \bar{5} + \bar{1}\} = \bar{1} + <\bar{2}>$

$\bar{4} + <\bar{2}> = \bar{4} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{4}, \bar{0}, \bar{2}\} = \bar{0} + <\bar{2}>$

$\bar{5} + <\bar{2}> = \bar{5} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{5}, \bar{1}, \bar{3}\} = \bar{1} + <\bar{2}>$

$\therefore Z_6/_{<2>} = \{\bar{0} + <\bar{2}>, \bar{1} + <2>\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

كذلك $(Z_6/_{<3>}, +_6, \cdot_6)$ حلقة قسمة

ملاحظة: (1)

$\cup Z_n/_I = Z_n$, $\cap Z_n/_I = \phi$

(2) لتكن $(I, +, \cdot)$ مثالي للحلقة $(R, +, \cdot)$

(a) اذا كانت R حلقة ابدالية فان R/I حلقة ابدالية

(b) اذا كانت R حلقة مع المحايد فان R/I حلقة مع المحايد

(c) $(R/I, +, \cdot)$ حلقة قسمة

مبرهنة: لتكن $(I,+,\cdot)$ مثالي للحلقة الإبدالية $(R,+,\cdot)$ مع المحايد فأن $(R/I,+,\cdot)$ مساحة عددية إذا وفقط إذا $(I,+,\cdot)$ مثالي أولي

البرهان: $\Leftarrow$

نفرض أن $(I,+,\cdot)$ مثالي أولي ،
نبرهن أن R/I مساحة عددية

$\because$ R حلقة ابدالية مع المحايد، فأن R/I حلقة ابدالية مع المحايد

$$(a+I)\cdot(b+I)=I \Rightarrow a\cdot b\in I \Rightarrow a\in I \text{ أو } b\in I$$

(لبما أن I مثالي أولي)

$$a+I=I \text{ أو } b+I=I$$

$\therefore$ R/I لا تمتلك قواسم صفرية

$\therefore$ $(R/I,+,\cdot)$ مساحة عددية

$\Rightarrow$

نفرض أن R/I مساحة عددية
نبرهن أن $(I,+,\cdot)$ مثالي أولي للحلقة R

$\because$ R/I مساحة عددية
$\therefore$ R/I لا تمتلك قواسم صفرية

$$\therefore (a+I)\cdot(b+I)=I$$

$$\Rightarrow a+I=I \text{ أو } b+I=I$$

$$ab+I=I \Rightarrow a\cdot b\in I \Rightarrow a\in I \text{ أو } b\in I$$

$\therefore$ $(I,+,\cdot)$ مثالي أولي

مبرهنة/ ليكن $(I,+,\cdot)$ مثالي للحلقة $(R,+,\cdot)$ تكون $(R/I,+,\cdot)$ حلقة

البرهان/

(1) $(R/I,+)$ ~~مغلقة~~ زمرة ابدالية

(1) حسب ~~(المبرهنة)~~ التعريف تكون خاصية الإنغلاق متحققة

$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$

(2) $[(a+I)+(b+I)]+(c+I)=[(a+b)+I]+(c+I)$

$=(a+b+c)+I=(a+(b+c))+I$

$=a+I+[(b+c)+I]=(a+I)+[(b+I)+(c+I)]$

(3)

العنصر المحايد للجمع $(0+I)$

$(a+I)+(0+I)=(a+0)+I=a+I$

(4)

النظير (المعكوس)

$\forall\, a+I\in R/I \quad \exists\, -a+I\in R/I$

$(a+I)+(-a+I)=(a-a)+I=0+I$

(5) $a+I\,;\, b+I\in R/I$

$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I=(b+a)+I$

$=(b+I)+(a+I)$

$\therefore$ $(R/I,+)$ زمرة ابدالية